ओरिगैमी द्वारा

चौकोर कागज से गोल आकृतियां

ओरिगैमी द्वारा

चौकोर कागज से गोल आकृतियां

लेखक : रवीन्द्र केसकर
अनुवादक : अरविन्द गुप्ता

वि P
V प्र

विज्ञान प्रसार

प्रकाशक

विज्ञान प्रसार

सी-24, कुतुब इन्स्टीट्यूशनल एरिया
नई दिल्ली-110 016
पंजीकृत कार्यालय : टेक्नोलॉजी भवन, नई दिल्ली-110 016
फोन : 6967532
फैक्स : 6965986
इंटरनेट : http://www.vigyanprasar.com
ई-मेल : vigyan@hub.nic.in

संपादक	:	नरेन्द्र सहगल
	:	सुबोध महंती
परिकल्पना एवं समन्वय	:	डॉ. मधु फुल्ल
	:	डॉ. डी.के. पाण्डेय
हिन्दी अनुवाद	:	अरविन्द गुप्ता
हिन्दी संपादक	:	डॉ. हरिकृष्ण देवसरे
शब्द संयोजन एवं पृष्ठ योजना	:	सुभाष भट्ट

आई.एस.बी.एन. : 81–7480–077–8

कला एवं मुद्रक : शगुन ऑफसेट क्वालिटी प्रिंटर, 131–132 मोहम्मदपुर, नई दिल्ली–66 फोन 6167452, 6180574–75

अनुक्रम

प्रस्तावना

हमारे स्कूलों में बहुत से बच्चों को गणित विषय से डर लगता है। उन्हें भौतिकी, रसायन और जीवशास्त्र जैसे विज्ञान के विषयों की अपेक्षाकृत गणित से अधिक भय लगता है। इसका शायद प्रमुख कारण यह है कि इन विषयों में जो कुछ भी पढ़ाया जाता है उसका असली जीवन से बहुत कम संबंध होता है। अनुभव यह बताता है कि अगर इन विषयों का जिंदगी से सीधा संबंध जोड़ा जाए तो इन्हें पढ़ाना और सीखना बहुत आसान हो जाता है। तब इन विषयों का भय दूर भाग जाता है और बच्चे इन्हें खुशी–खुशी सीख लेते हैं। इसीलिए विज्ञान और गणित को लोकप्रिय बनाने के सभी कार्यक्रमों में, राष्ट्रीय विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी संचार परिषद् इस बात का विशेष रूप से ध्यान रखती है।

राविप्रौसंप लगभग एक दशक से श्री रवीन्द्र केसकर के सहयोग से ओरिगैमी की कार्यशालाएं आयोजित कर रहा है। इनमें शिक्षकों और स्वयंसेवी संस्थाओं के कार्यकर्ताओं को प्रशिक्षित किया जाता है। यह कार्यक्रम काफी सफल और लोकप्रिय हुआ है। इनकी सफलता के पीछे श्री केसकर का अथक प्रयास, निष्ठा और उनका अपार उत्साह है।

श्री केसकर की इस पुस्तक पर कई वर्षों से काम चल रहा था। असल में तो पुस्तक बहुत पहले ही छप जानी चाहिए थी। लेकिन देर आई दुरुस्त आई, शायद यही कहना उपयुक्त होगा। सच बात तो यह है कि इस विषय पर पुस्तकों का नितांत अभाव है। वैसे भी कई मायनों में यह पुस्तक एकदम अनूठी है। पुस्तक की सामग्री को संजोते समय इस बात का सचेतन प्रयास किया गया है कि उसकी गतिविधियां राष्ट्रीय विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी संचार परिषद् की सातवीं, आठवीं और नवीं की कक्षाओं के पाठ्यक्रम के अनुरूप हों। इस वजह से पुस्तक की उपयोगिता और बढ़ जाती है। अगर इन कक्षाओं की पढ़ाई में, गणित के शिक्षक, ओरिगैमी को, पूरक गतिविधियों की तरह इस्तेमाल करेंगे तो बच्चों को उनमें बहुत मजा आएगा और इससे उन्हें गणित के सिद्धांत भी अधिक स्पष्ट रूप में समझ में आएंगे।

ओरिगैमी द्वारा आम लोग गणित की बारीकियों को समझ पाएंगे और इससे बाद में स्कूलों में गणित की प्रयोगशालाएं खोलने में मदद मिलेगी। हम इसी प्रकार की और किताबें भी छापने का प्रयास करते रहेंगे। इस पुस्तक के बाद हम 1893 में लिखी श्री टी सुंदरा राव की ऐतिहासिक पुस्तक 'सम ज्योमेट्रिक एक्सरसाइजिज इन पेपर फोल्डिंग' को छापेंगे। यह पुस्तक पहली बार अपने देश में छपेगी।

इस पुस्तक की उपयोगिता का सही मूल्यांकन तो केवल इसे पढ़ने वाले छात्र और शिक्षक ही कर सकते हैं। इस पुस्तक को भविष्य में और बेहतर बनाने के लिए हम आपकी टिप्पणियों का हार्दिक स्वागत करेंगे। अगर इस पुस्तक के कारण कुछ बच्चों में गणित का डर कम हो जाता है और कुछ भयमुक्त हो जाते हैं तो इस पुस्तक का छपना सार्थक होगा।

नई दिल्ली
जून 2000

नरेन्द्र सहगल
वैज्ञानिक 'जी' और प्रमुख एनसीएसटीसी
और निदेशक, विज्ञान प्रसार

भूमिका

'प्रकृति कितनी अजीबोगरीब है! वह बिना किसी प्रयास के सरल पदार्थ से भी अनेक अद्भुत चीजें गढ़ देती हैं। उसकी हर वस्तु सुंदर और श्रेष्ठ होती हैं और उन पर प्रकृति की कारीगरी की अमिट छाप होती है। प्रकृति की प्रत्येक रचना का एक मौलिक सार होता है और हरेक घटना अलग लगने के बावजूद भी संपूर्ण का एक हिस्सा होती है।'

–गोथे

प्रकृति और गणित

अलग–अलग चीजों को रचने के लिए प्रकृति सरल पदार्थ को एक 'विशेष तरीके' से संगठित करती है। यह 'विशेष तरीका' ही असल में गणित का मूर्त रूप है। सृजन, सौंदर्य, विकास एवं उत्क्रम–माप की प्रक्रियाएं इसी गणित में परिलक्षित होती हैं। सभी अलग–अलग और सुंदर दिखने वाली वस्तुओं का मूलभूत आधार गणित ही है। परंतु प्रकृति अपनी कलाकृतियों के पीछे की गणित को छिपाती है – आसानी से नहीं बताती है।

मनुष्य और गणित

शुरुआत की गणित : शुरुआत में गणित का विकास दर्जी, मिस्त्री और अन्य दस्तकारों के हाथों हुआ। गणित का रोजमर्रा के कामकाज के साथ एक गहरा रिश्ता है। गणित की शब्दावली में हमें, आम जिंदगी के साथ उसके रिश्ते की साफ झलक मिलती है। जरा सीधी रेखा जिसे अंग्रेजी में 'स्ट्रेट लाइन' कहते हैं पर ही गौर करें। इसका मूल शब्द है 'स्ट्रेच्ड लिनेन' यहां स्ट्रेच्ड = खिंची और लिनेन = डोर है। ज्यामिति के इस शब्द की जड़ों को हरेक मेहनतकश किसान जानता है। आलू के पौधों को एक सीधी रेखा में लगाने के लिए सिर्फ एक डोर को तानना होता है। एक राज–मिस्त्री भी, सीधी दीवार बनाने के लिए, ईंटों की चिनाई करते वक्त एक खिंची डोर का सहारा लेता है। समय के गुजरने के साथ–साथ 'खिंची डोर' ही 'सीधी रेखा' बन गई।

स्कूली गणित : आजकल स्कूलों में पढ़ाई गई गणित बहुत हद तक जिंदगी की असलियत से कट गई है। पाठ्यक्रम पेशेवर गणितज्ञों की लफ्फाजी से भरा पड़ा है। इस माहौल में गणित की खूबसूरती और खुशी कहीं दफन हो गई है। आजकल सभी अच्छे स्कूलों में भौतिकी, रसायन और जीव–विज्ञान की प्रयोगशालाएं होती हैं – जिनमें तमाम महंगे और नवीनतम उपकरण मौजूद होते हैं। परंतु शायद ही कोई ऐसा स्कूल हो जिसमें गणित की कोई प्रयोगशाला हो। आम धारणा के अनुसार गणित को पहाड़े रटकर और बार–बार प्रश्नों का अभ्यास करके ही सीखा जा सकता है। ज्यादातर बच्चों को गणित से डर लगता है और वे अपना पूरा स्कूली जीवन इस भय के आतंक में बिताते हैं। अगर बच्चों को गणित की खूबसूरत दुनिया का मजा लेना है तो यह जरूरी है कि वे गणित की समस्याओं पर कुछ ठोस रूप से काम करें।

ओरिगैमी और गणित : जापानी कला ओरिगैमी (ओरि=मोड़ना और गैमी=कागज) दरअसल कागज को मोड़ने की कला है। कागज को दोहरा मोड़ने से उसमें एक रेखा बन जाती है। कागज को विशेष तरीके से मोड़ने से उससे कई कोण, ज्यामिति की आकृतियां और विभिन्न ठोस आकृतियां बनाई जा सकती हैं। इस तरीके से ठोस गतिविधियों द्वारा बहुत सारी अमूर्त ज्यामिति सीखी जा सकती है।

प्रकृति, ओरिगैमी और गणित :
ओरिगैमी जीवन की प्रक्रियाओं के समतुल्य है : पीटर ऐंजिल

ओरिगैमी में हम कागज द्वारा प्रकृति की नकल करते हैं। समुद्री झींगा (श्रिम्प) जैसे जटिल जानवरों को भी केवल एक कागज के चौकोर पन्ने से मोड़ कर बनाया जा सकता है। यहां पर हमें नीरस आंकड़े और समीकरण नहीं बल्कि गणित के जीवंत रूप, उसकी

सुंदरता और लयबद्धता की सही झलक मिलती है। अब हम समीकरणों में पाए जाने वाले अमूर्त √2 के बारे में अचरज करने लगते हैं। इस आंकड़े का असली जीवन के साथ क्या संबंध है? कागज के चौकोर को मोड़ना तो ओरिगैमी होती है परंतु जैसे ही हम उस कागज को खोलते हैं उसमें हमें गणित दिखाई देती है। कागज को मोड़ने ओर खोलने की प्रक्रिया किसी गणित की प्रयोगशाला में विभिन्न प्रयोग करने के समान होती है। ओरिगैमी में बहुत सी गणित चौकोर कागज की तहों के अंदर छिपी होती है।

भारत में इस दिशा में कुछ शुरूआती प्रयास : इस संदर्भ में एक भारतीय गणितज्ञ श्री टी सुंदरा राव के मौलिक शोधों का उल्लेख करना आवश्यक है। 1893 में छपी उनकी पुस्तक 'सम ज्यामेट्रिक एक्सरसाइजिज इन पेपर फोल्डिंग' अपनी तरह की एक अनूठी पुस्तक है। दुर्भाग्य यह है कि अपने ही देश में यह पुस्तक आज तक नहीं छपी है।

भारत में ओरिगैमी द्वारा गणित सिखाने के प्रयास : पिछले कुछ सालों में राष्ट्रीय विज्ञान और प्रौद्योगिकी संचार परिषद के तत्वाधान में ओरिगैमी द्वारा गणित सिखाने पर कुछ सुनियोजित शोध शुरू हुआ है। देश के लगभग सभी भागों में 'ओरिगैमी से गणित' के विषय पर शिक्षकों के लिए कार्यशालाएं आयोजित की गई हैं। शिक्षकों ने इनका सहर्ष स्वागत किया है और सभी इलाकों से कार्यशालाओं को दुबारा करने की मांग आई है। प्रशिक्षण लेने के बाद कई शिक्षक इसका उपयोग अपने छात्रों के साथ कर रहे हैं। हैदराबाद की शिक्षिका श्रीमती राजलक्ष्मी तो इसके लिए ब्रिटिश कैस्मे पुरस्कार से भी सम्मानित हुईं हैं।

पुस्तक का मूल विषय : इस किताब में चौकोर कागज से गोल बिल्ले बनाने की तकनीक को समझाया गया है। पुस्तक में कागज के बिल्लों के दो पक्षों को उजागर किया गया है। एक ओर उनकी गणित संबंधी संभावनाओं पर प्रकाश डाला गया है और दूसरी ओर उनकी मनमोहक सुंदरता को उभारा गया है।

कागज के छोटे से चौकोर में बड़ो–बड़ों के लिए स्थान है।

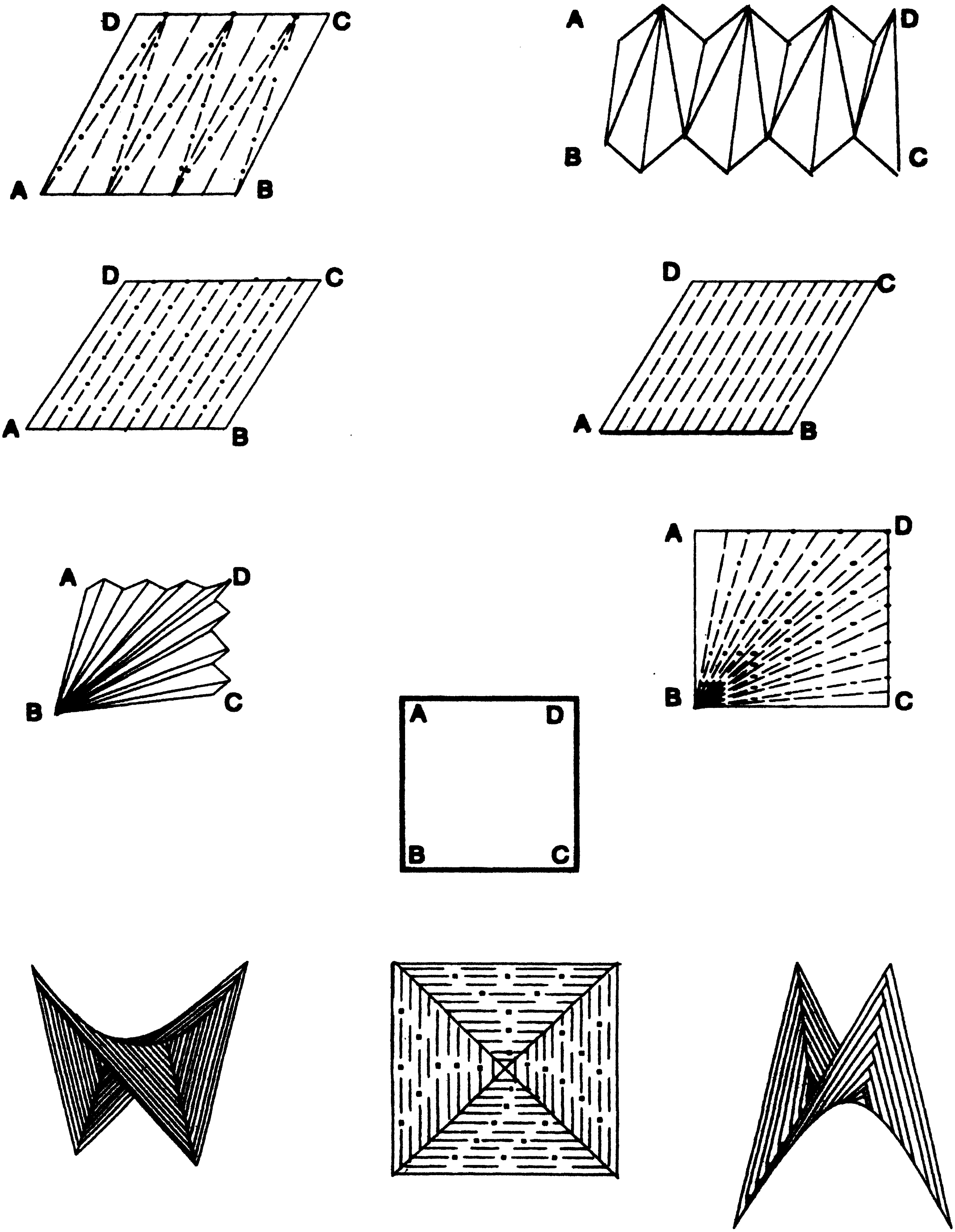
इसलिए खुशी–खुशी मोड़िए।

रवीन्द्र केसकर

जून 2000

प्रथम खंड

मूलभूत



चौकोर कागज से बनी विभिन्न आकृतियां

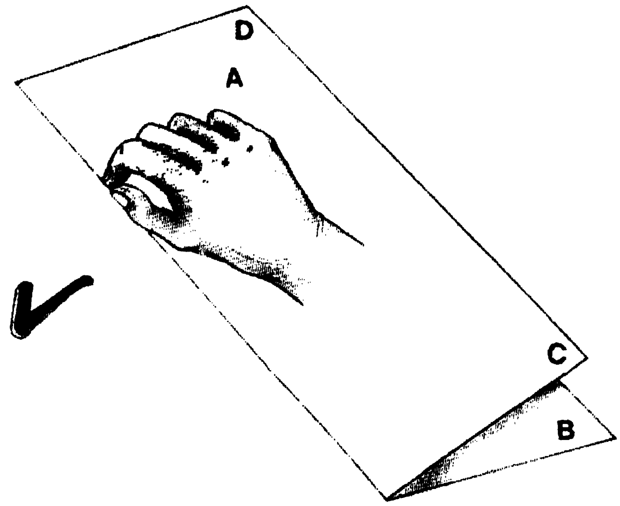
मोड़ना शुरू करने से पहले

इस किताब में दिए सभी नमूनों के लिए एकदम साफ और स्पष्ट मोड़ चाहिए। इनको बनाने के लिए आपको एक सख्त ओर समतल सतह की जरूरत पड़ेगी।

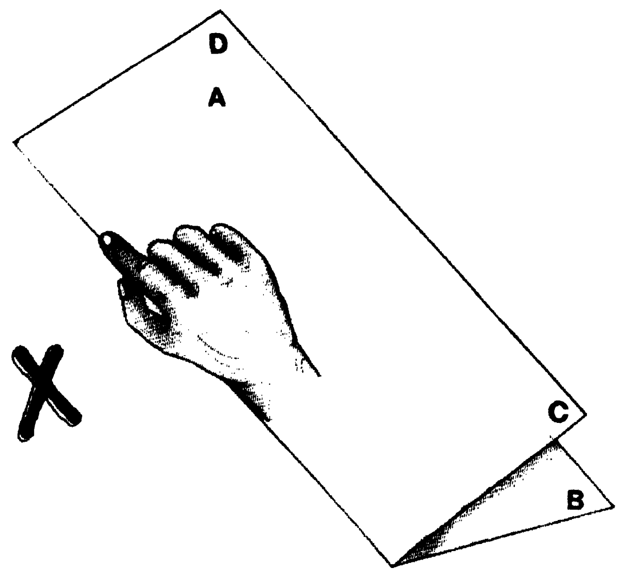
हमेशा अपने अंगूठे को उल्टा करके उसके नाखून से कागज़ को कस कर मोड़ें। कागज़ को पोरों (उंगलियों की त्वचा) से रगड़ने से मोड़ कभी भी साफ और स्पष्ट नहीं बनेंगे। उससे, कागज पसीना सोख लेगा और मुलायम पड़ जाएगा। इसलिए कभी भी उंगलियों के पोरों से नहीं मोड़ें। साथ–साथ कभी भी कागज़ को ऊपर उठा कर हवा में न मोड़ें। जानवरों के मॉडल बनाते समय अक्सर कागज को उंगलियों से हवा में ऊपर उठाकर मोड़ा जाता है। इसके लिए एक विशेष तकनीक अपनाई जाती है। जिसे 'वेट फोल्डिंग' कहते हैं। इसमें गोलाई लाने के लिए गीले कपड़े का इस्तेमाल किया जाता है।

इस पुस्तक में दिए नमूने बनाने के लिए आपको कागज़ को एकदम साफ और स्पष्ट मोड़ना होगा। जब आप मोड़ें तब एक बात का ध्यान रखें कि नाखून का दाब केवल एक बिन्दु पर ही पड़े।

इसलिए हमेशा अपने अंगूठे को उल्टा करके उसके नाखून से ही मोड़ें।



हमेशा अपने अंगूठे को उल्टा करके उसके नाखून से ही मोड़ें



कभी भी उंगलियों के पोरों से न मोड़ें

इसलिए हमेशा अपने अंगूठे को उल्टा कर उसके नाखून से ही मोड़ें।

अध्याय 3
ओरिगैमिस्ट का चौकोर

ओरिगैमिस्ट कौन है?

ओरिगैमिस्ट वह व्यक्ति है जो एक कागज़ के वर्ग को मोड़कर ओरिगैमी का कोई नमूना बनाता है। वह कागज़ को काटता और चिपकाता नहीं है।

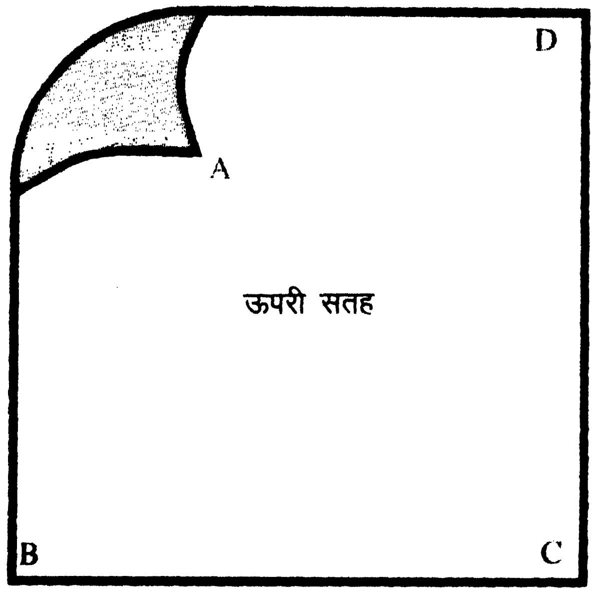
वर्ग – कागज़ का महज़ एक चौकोर टुकड़ा भर है। है न?

ओरिगैमी का वर्ग एक चौकोर कागज़ जरूर है पर असल में वह उससे कहीं अधिक है। एक ओरिगैमिस्ट के लिए, कागज़ का चौकोर तमाम अद्‌भुत ओरिगैमी के मॉडल सृजन करने का एक माध्यम है।

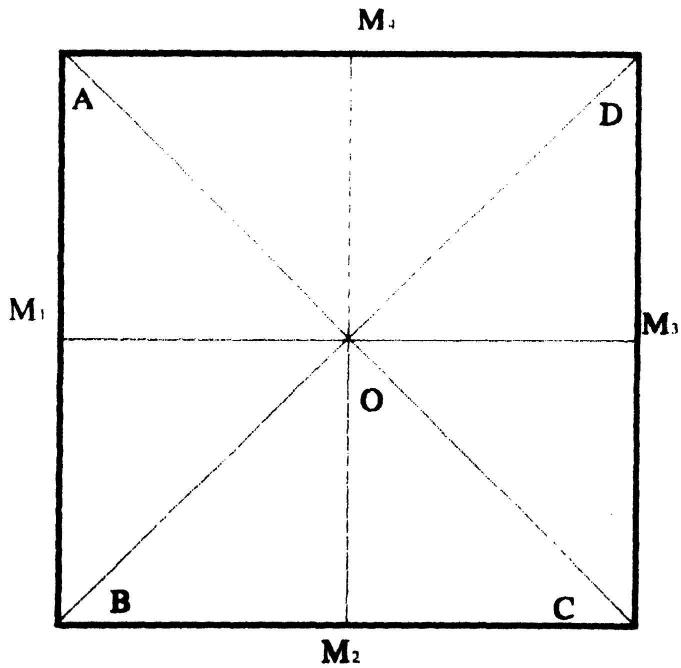
1. इस किताब में दिखाए चौकोर की ऊपरी सतह सफेद और निचली सतह गहरे रंग की है। आपके पास चाहे कैसा भी कागज़ क्यों न हो – रंगीन, घुटवां, छींटदार या डिज़ाइन वाला, आप पाएंगे कि उसकी ऊपरी और निचली सतहें अलग–अलग तरह की होंगी।

2. जब आप इस किताब में से कोई नमूना बनाएं तो ध्यान से हमेशा कागज़ की सफेद, सादा या खुरदरी सतह ऊपर की ओर रखें। साथ–साथ कोनों A, B, C, D, और भुजाओं के मध्य–बिन्दु M_1, M_2, M_3, M_4 का भी ध्यान रखें। बिन्दु O वर्ग के केन्द्र में स्थित है। ऐसा न करना एक अज़नबी शहर में नक्शे के बिना घूमने जैसा होगा। आप शायद अपनी मंज़िल तक पहुंच जाएं, पर आपको मुश्किल ज़रूर होगी।

इसलिए चौकोर कागज़ पर सबसे पहले चारों कोनों पर A, B, C, और D लिखना बेहद जरूरी है।



चित्र 1 : चौकोर की दो सतहें



चित्र 2 : चौकोर कागज पर कोने, केन्द्र और मध्य बिन्दु इंगित करें

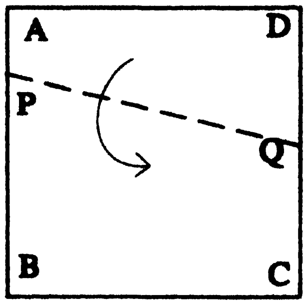
संकेत

ओरिगैमी नमूनों को मोड़ने के तरीके को समझाने के लिए इस पुस्तक में कुछ चिन्ह इस्तेमाल किए गए हैं। इनमें से अधिकांश चिन्ह न्यूयार्क में हुई 'कन्वेन्शन 88' पर आधारित हैं। इसमें दुनिया के जाने-माने ओरिगैमिस्टों ने कागज़ मोड़ने के चिन्हों पर काम किया। यहां पर उन्हीं मानक चिन्हों को दिया गया है।

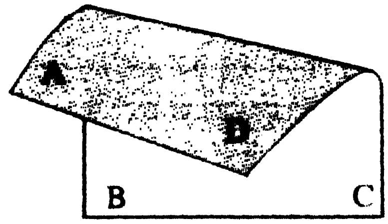
1. घाटी-मोड़

1 (a) और (b) घाटी-मोड़ छोटी-छोटी लकीरों से बनी रेखा से दिखाया जाता है। इसमें एक मुड़ा हुआ तीर होता है जो मोड़ने की दिशा को दर्शाता है।

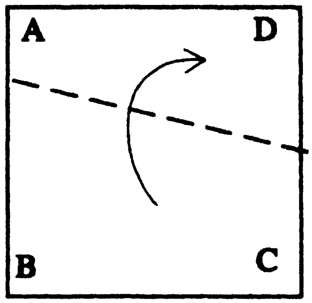
1 (c) दो सिर वाले विशेष तीर का मतलब है – पहले मोड़ो, फिर खोलो। घाटी मोड़ने और खोलने से वर्गाकार कागज़ पर घाटी जैसे मोड़ पड़ जाते हैं।



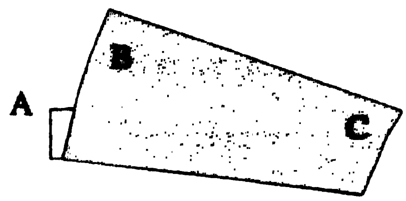
चित्र : 1 (a) चिन्ह : घाटी मोड़ नीचे की ओर



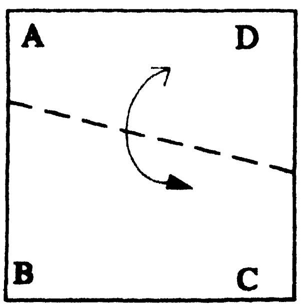
... इस प्रकार



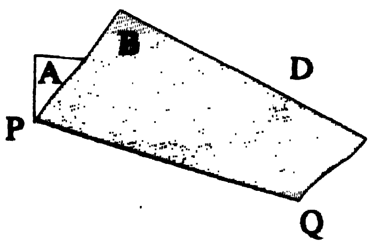
चित्र : 1 (b) घाटी मोड़ ऊपर की ओर



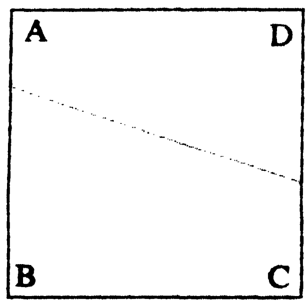
... इस प्रकार



चित्र 1 : (c) चिन्ह : घाटी मोड़ें और फिर उसे खोलें



... इस प्रकार मोड़ें



... और फिर खोलें

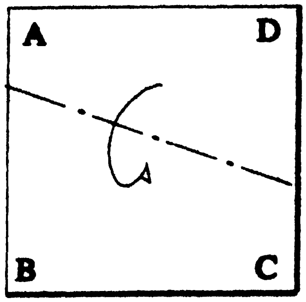
2. पहाड़ी मोड़

पहाड़ी मोड़ को 'छोटी लकीर और बिन्दु' की बनी रेखा से दिखाया जाता है। कभी–कभी इसे 'छोटी लकीर – बिन्दु–बिन्दु' की बनी रेखा से भी दर्शाया जाता है। इसमें दिखाया आधा और खोखला तीर मोड़ने की दिशा इंगित करता है।

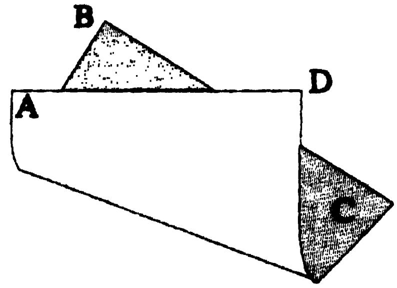
वैसे आपने अब तक अन्दाज़ लगा ही लिया होगा कि घाटी–मोड़ ऊपर से घाटी जैसा दिखेगा, परन्तु पीछे से पहाड़ी जैसा लगेगा।

घाटी–मोड़ को बनाना पहाड़ी–मोड़ बनाने से कहीं अधिक सरल है। इसलिए जहां भी संभव हो वहां पहाड़ी–मोड़ बनाने के लिए कागज़ को पलट कर उस पर घाटी–मोड़ बनाना चाहिए। जरा सोचिए तो आप पहाड़ी नुमा चुन्नटें कैसे बनाएंगे?

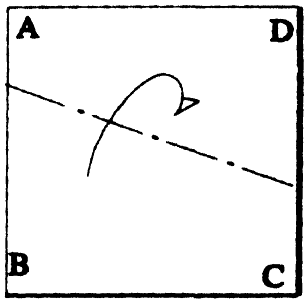
कागज़ को कट्टम–काट मोड़ कर, घाटी तथा पहाड़ी के मोड़ों का खूब अभ्यास करें। घाटी और पहाड़ी के बीच के अन्तर को नज़रंदाज करना, गणित में + और – के चिन्हों को एक समान समझने जैसा है।



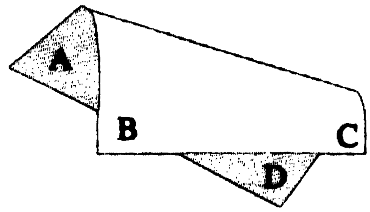
चित्र 2 : (a) चिन्ह : पहाड़ी मोड़ नीचे की दिशा में



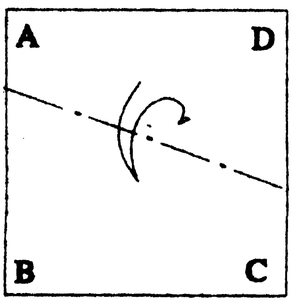
... इस प्रकार



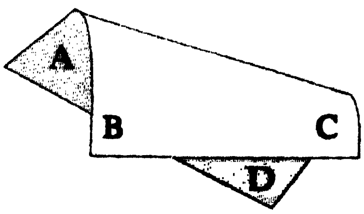
चित्र 2 : (b) चिन्ह : पहाड़ी मोड़ ऊपर की ओर



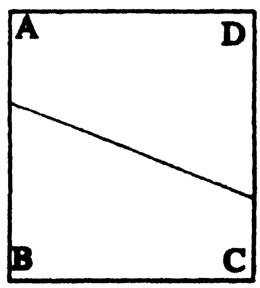
... इस प्रकार



चित्र 2 : (c) चिन्ह : पहाड़ी मोड़ पहले मोड़ें और फिर उसे खोलें



... इस प्रकार मोड़ें



... फिर उसे दुबारा खोलें

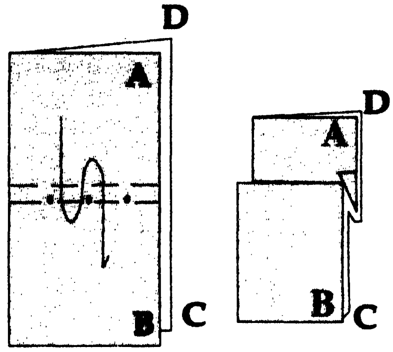
3. चुन्नट मोड़

नया चिन्ह

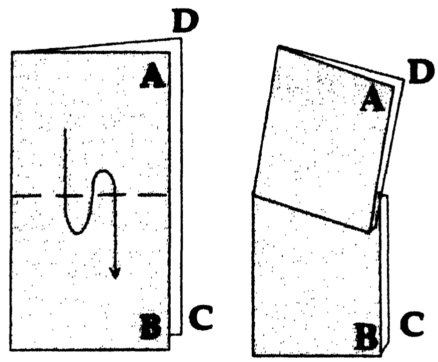


पुराना चिन्ह





चित्र 3 : (a) चुन्नट मोड :
(समानांतर चुन्नटें)



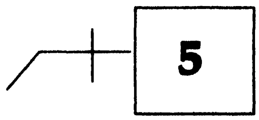
चित्र 3 : (b) चुन्नट मोड़ :
(एक–दूसरे को काटती हुई चुन्नटें)

चुन्नट मोड़ में आस–पास कई घाटी मोड़ होते हैं। इस पुस्तक के अधिकांश मॉडलों में चुन्नट मोड़ प्रयोग किए गए हैं जिन्हें चित्र (3b) में दिखाया गया है।

4. बार बार मोड़ें

नया चिन्ह

पांच बार दोहराएं

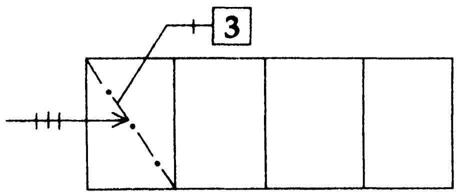


पुराना चिन्ह

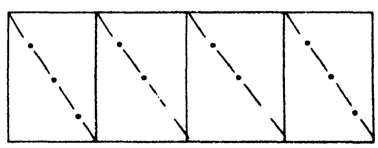
चार बार दोहराएं



बार–बार मोड़ने वाला संकेत, कितनी बार मोड़ना है इस संख्या को दर्शाता है। वर्ग के अंदर लिखी संख्या नया संकेत है। पुराने चिन्ह में तीर होता था और तीर को काटने वाली लकीरें मोड़ने की संख्या दर्शाती थीं।



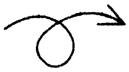
चित्र 4 : (a)
इस प्रकार के चिन्ह का अर्थ है :



चित्र 4 : (b) ...
कि इस प्रकार तीन बार मोड़ें

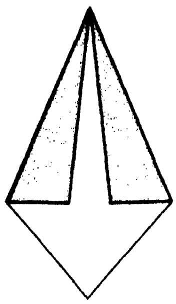
5 और 6 को पलटें

5. बाएं से दाएं पलटें

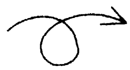


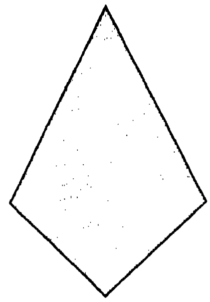
6. ऊपर से नीचे पलटें



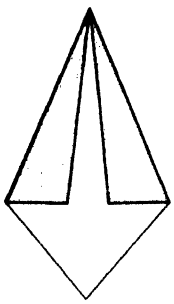


चित्र 5 : (a)
बाएं से दाएं पलटें

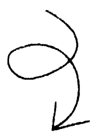


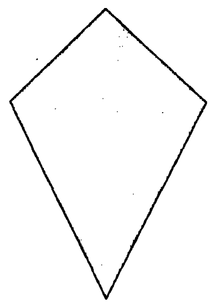


चित्र : 5 (b) ... इस प्रकार



चित्र 6 : (a)
ऊपर से नीचे पलटें





चित्र 6 : (b) ... इस प्रकार

द्वितीय खंड

सुन्दरता

सादा बिल्ला

इस पुस्तक में दिए सभी अभ्यासों में सादा बिल्ला प्रयोग में लाया गया है। इसलिए सादा बिल्ला बनाने की तकनीक पर मास्टरी हासिल करना बहुत जरूरी है। यहां पर इसे बनाने का पूरा तरीका विस्तार से समझाया गया है। इसको आधार बनाकर ओरिगैमिस्ट खुद की कोई आसान तकनीक विकसित कर सकता है।

1 (a) और (b) पुस्तक मोड़ : एक वर्गाकार कागज़ को किताब जैसे आधे में मोड़ें। इस तरह समान नाप के दो आयत बन जाएंगे, जिनका अनुपात 2×1 का होगा। इसी अनुपात का उपयोग हम आगे के अभ्यासों में भी करेंगे।

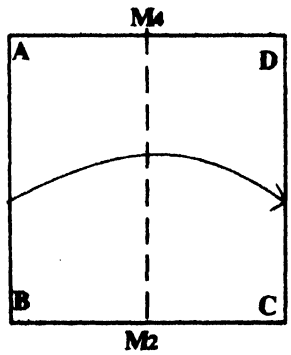
2. सबसे पहले चित्र में दिखाए तरीके से आयत को घाटी मोड़ों द्वारा आठ बराबर हिस्सों में मोड़ें। आठ भाग करने के लिए कागज़ को एक के ऊपर एक लपेट कर नहीं मोड़ें। इसके लिए दो हिस्सों में बांटने वाले 'बायनरी तरीके' को अपनाएं।

बायनरी तरीका

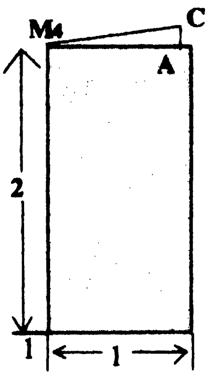
3 और 4 पहले दो तहों वाले आयत के दोनों सिरों को आपस में मिलाकर आयत को दो बराबर हिस्सों में बांटें। इस तरह दो वर्ग बन जाएंगे। हरेक वर्ग को घाटी मोड़ों द्वारा फिर आधे में बांटें।

5 और 6 निचले सिरे M_2B को ऊपरी वर्ग की M_4OM_1A की मध्य–रेखा से जोड़ें। दूसरे आधे हिस्से के साथ भी यही तरीका दोहराएं। अंत में ऊपर और नीचे के आयतों में घाटी मोड़ बनाएं।

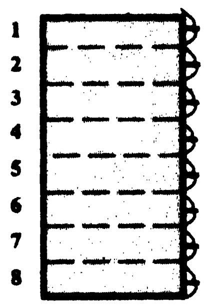
7. इस तरह से आयत एकदम बराबर नाप के आठ हिस्सों में बंट जाएगा।



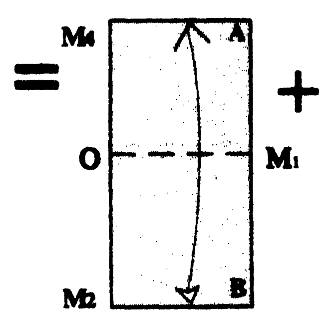
चित्र 1 : (a) पुस्तक मोड़



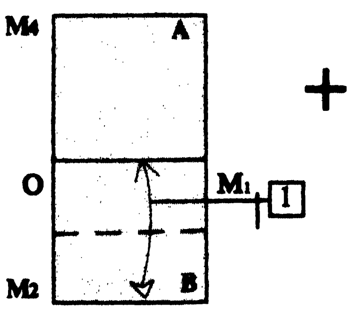
चित्र 1 (b) पुस्तक मोड़ खत्म



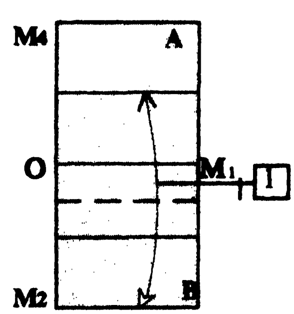
चित्र 2 : आठ बराबर खंड



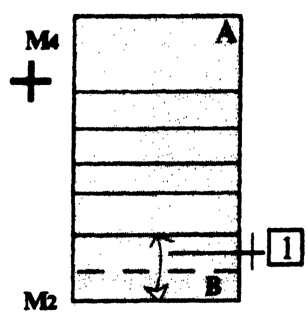
चित्र 3 : खंडों में बांटने का बायनरी तरीका



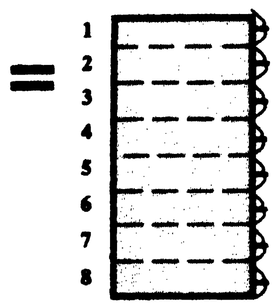
चित्र 4 : बायनरी तरीका जारी



चित्र 5 : बायनरी तरीका जारी



चित्र 6 : बायनरी तरीका जारी



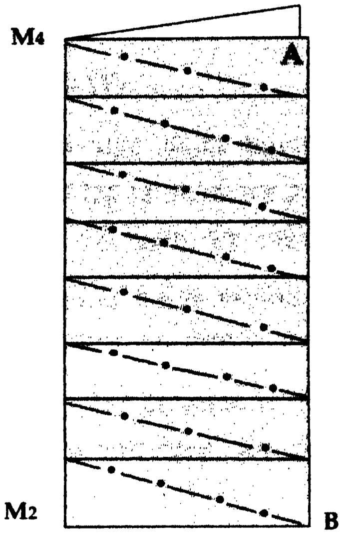
चित्र 7 : आठ बराबर खंड

8 (a) और (b) इस चरण में आठों आयतों की आठों समानांतर कर्णों पर पहाड़ी मोड़ मोड़ें और खोलें। इस बार का ध्यान रखें कि सभी मोड़ कर्ण की सीध में हों, और आयत के एक कोने से दूसरे कोने तक जाएं। अगर इनमें कुछ भी गलती हो तो उन्हें सुधारें और दुबारा कोशिश करें, क्योंकि घाटी–नुमा मोड़ आसानी से और ज्यादा सही बनते हैं, इसलिए :

9. सबसे ऊपर वाले हिस्से पर घाटी मोड़ें जिससे उसकी निचली सतह ऊपर आ जाए।

10. इस खंड की कर्ण पर घाटी मोड़ें। अब कागज़ को वापस खोल कर उसका आयत बनाएं। इस तरह आप पहले खंड में एक पहाड़ी नुमा मोड़ पाएंगे।

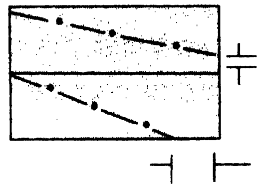
11 (a) और (b) इसी प्रकार दूसरे खंड में भी पहाड़ी मोड़ बनाएं। बाकी सारे खंडों को भी इसी तरह मोड़ें।



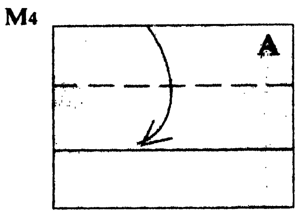
चित्र 8 : कर्ण पर पहाड़ी मोड़



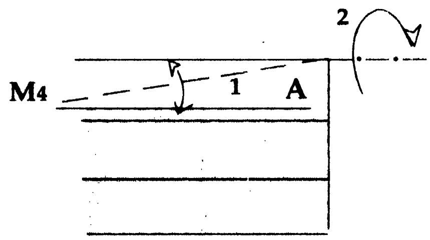
चित्र : 8 (*a*) सही



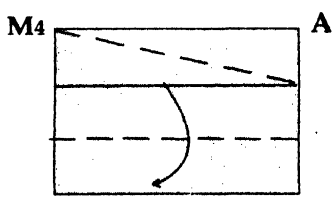
चित्र 8 : (*b*) गलत



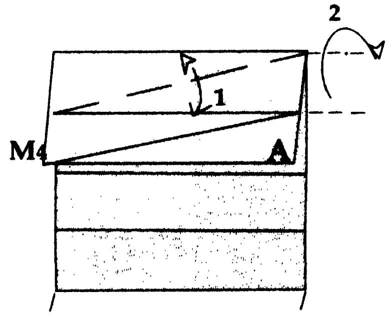
चित्र 9 : एक खड को पलटें....



चित्र 10 : .... और पहाड़ी मोड़ बनाएं



चित्र 11 : (*a*) पट्टी को पलट कर पहाड़ी मोंड़ें



चित्र 11 : (*b*) पहाड़ी मोड़ जारी

1 2. अब हमारे पास सात पहाड़ी–नुमा मोड़ होंगे जो सभी, आयत की छोटी भुजा के समानांतर होंगे। साथ–साथ हरेक आयत की कर्ण पर पहाड़ी के मोड़ भी होंगे।

1 3 (a) और (b) सबसे ऊपर वाले खंड को घाटी नुमा मोड़ें और फिर इस खंड की कर्ण को भी घाटी जैसे मोड़ें।

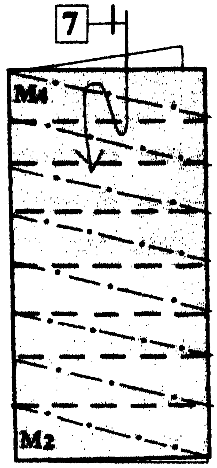
1 4. इस तरह एक चुन्नट मोड़ खत्म होगा और दूसरा शुरू होगा। इसके लिए पहले वाले पहाड़ी के मोड़ को न खोलें। अब दूसरे खंड पर इस तरह से घाटी मोड़ें जिससे दूसरा आयत आपके सामने हो। चित्र (15)

1 5. अब एक–साथ दूसरी कर्ण पर घाटी और पहले लेटे (क्षैतिज) मोड़ पर पहाड़ी मोड़ें (मोड़ों को पीछे से उल्टा मत करें)। इससे दूसरी चुन्नट पूरी हो जाएगी।

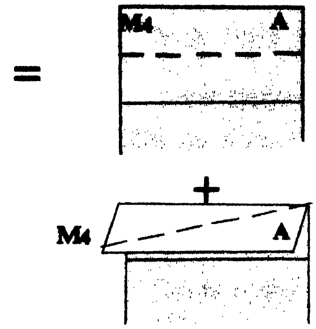
1 6 और 1 7 आगे की सारी चुन्नटों को क्रमबद्ध तरीके से मोड़ें। इस तरह धीरे–धीरे बिल्ले का आकार बन जाएगा।

1 8. इस स्थिति में सारी चुन्नटों के मोड़ खत्म हो जाएंगे। अब M_4 और B, दोनों कोनों के स्थानों को आपस में बदलें।

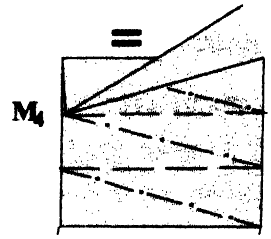
1 9. अब A से B तक का चाप साफ दिखाई देगा। इस तरह सादा बिल्ला बन जाएगा।



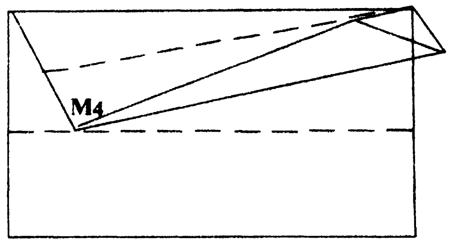
चित्र 1 2 : घाटी और पहाड़ी मोड़ों की श्रृंखला



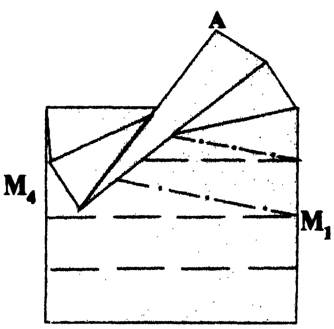
चित्र 1 3 : (*a*) और (*b*) चुन्नट मोड़ का पहला चरण



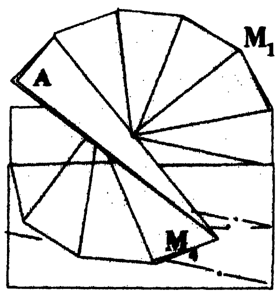
चित्र 1 4 : एक चुन्नट मोड़ समाप्त



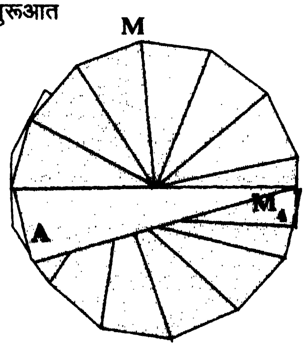
चित्र 1 5 : चुन्नटें मोड़ना जारी



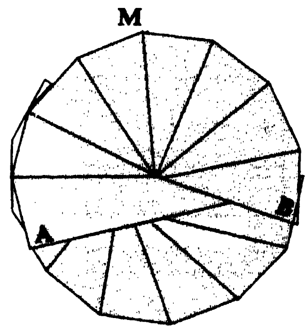
चित्र 1 6 : चुन्नटों के कारण बिल्ले के बनने की शुरूआत



चित्र 1 7 : बिल्ले के बनने का काम जारी



चित्र 1 8 : बिल्ला पूरी तरह तैयार



चित्र 1 9 : चाप AB स्पष्ट दिखता हुआ

बिल्ला बनाने के चरण

बिल्ला बनाने के तीन प्रमुख चरण हैं :

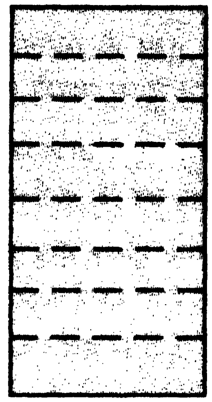
20. पहला चरण : सबसे पहले 2×1 के अनुपात का आयत बनाएं। आयत को काटकर या फिर मोड़ कर बनाया जा सकता है। आयत में दो या उससे अधिक परतें हो सकती हैं। आयत को घाटी मोड़ों द्वारा आठ बराबर हिस्सों में बाटें।

21. दूसरा चरण : इसमें सादा बिल्ले के समान ही घाटी और पहाड़ी के मोड़ बनाने पड़ते हैं, क्योंकि यह मोड़ सभी बिल्लों के लिए एक समान हैं इसलिए इनको हम आगे से **'सादा बिल्ले के मोड़'** कहेंगे। साथ–साथ 2×1 के मुड़े आयत को 'सादा बिल्ले का आधार' बुलाएंगे।

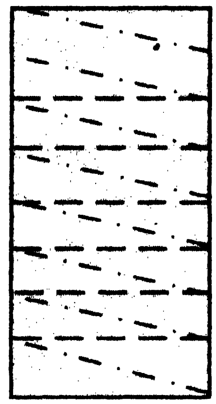
22. तीसरा चरण : इसमें सादे बिल्ले जैसी ही कई चुन्नटें मोड़नी पड़ती हैं। चुन्नट मोड़ते वक्त कागज़ थोड़ा घूमा हुआ सा लगता है। इसलिए इन मोड़ों को हम **'बिल्ले के चुन्नट वाले मोड़'** के नाम से बुलाएंगे।

23. बिल्ला ऊपर के तीन चरणों के बाद बन जाएगा। वैसे तो सभी बिल्ले लगभग एक ही तरीके से बनते हैं, फिर भी उन पर अलग–अलग खूबसूरत नमूने बनाए जा सकते हैं।

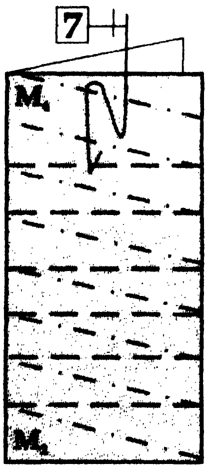
अब आइए हम बिल्लों की खूबसूरत दुनिया में कदम रखें।



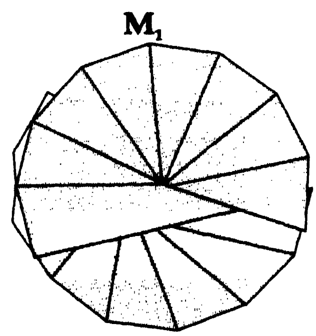
चित्र 20 : चरण I : बराबर नाप के आठ खाई मोड़



चित्र 21 : चरण II : सभी आयतों की कर्ण पर पहाड़ी नुमा मोड़



चित्र 22 : चरण III : चुन्नटें डालना



चित्र 23 : बिल्ला पूरी तरह बनकर तैयार

अध्याय 6

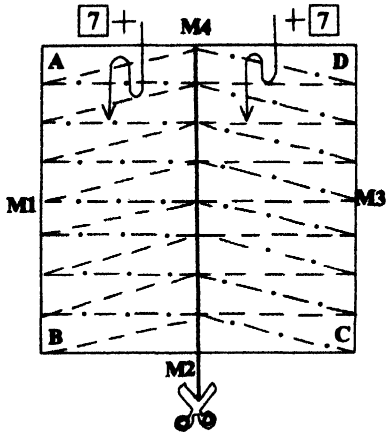
खुला हुआ सादा बिल्ला

एक रंगीन कागज़ का बना सादा बिल्ला लें। सारे मोड़ स्पष्ट हों, इस बात का ध्यान रखें। अगर जरूरत पड़े तो एक बार दुबारा मोड़ें।

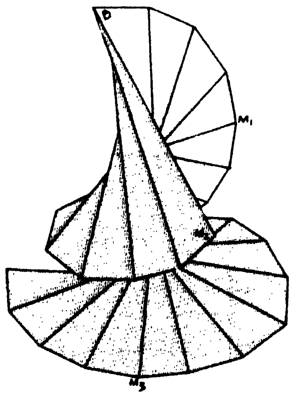
1. बिल्ले को खींच कर एक समतल आयत बनाएं और फिर उसे किताब जैसे खोल दें। इससे पास–पास दो आयत मिलेंगे। दोनों आयतों में सादे बिल्ले के मोड़ होंगे।

2 और 3. अब दाएं आयत में ऊपर से चुन्नट डालें और कागज़ की एक परत से सादा बिल्ला बनाएं। ऐसा करने से बाएं हाथ वाला आयत अपने आप एक घुमावदार सीढ़ी में बदल जाएगा। इस सीढ़ीनुमा ढांचे में भी चुन्नटें डाल कर एक और बिल्ला बना दें।

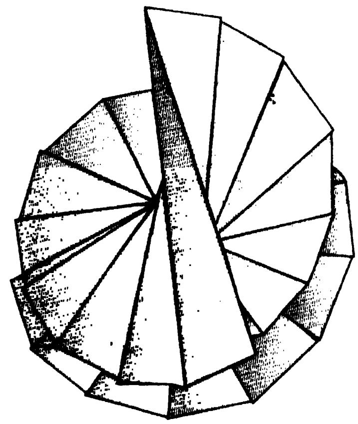
4. इस तरह एक खुला बिल्ला बन जाएगा। इसमें दो अलग–अलग बिल्ले आपस में वक्र M_2M_4 से जुड़े होंगे।



चित्र 1 : समतल खुला हुआ सादा बिल्ला

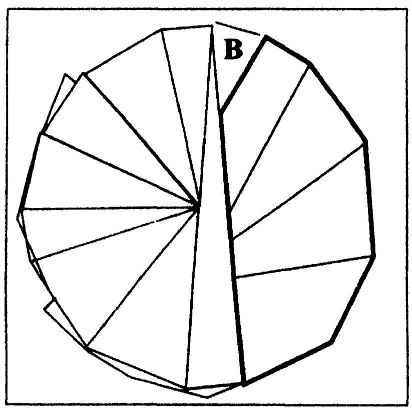


चित्र 2 : दाएं आयत में चुन्नटें डालें



चित्र 3 : बाएं आयत में चुन्नटें मोड़कर उसे दाएं बिल्ले पर बैठाएं

मज़ेदार काम : एक तीन परतों वाले आयत को सादा बिल्ले की तरह मोड़ें। अब इन परतों को खोल कर आपस में जुड़े तीन बिल्ले बनाएं। क्या आप और ज्यादा परतें ले सकते हैं?



चित्र 4 : खुला हुआ सादा बिल्ला

एक तह का बिल्ला

यह बिल्ला एक सादे बिल्ले से बना है। सादा बिल्ला आप पहले ही कई बार बना चुके हैं। इसको रंगीन कागज़ से ही बनाना ठीक रहेगा। एक तह का बिल्ला आप 2×1 अनुपात के किसी भी आयत से बना सकते हैं।

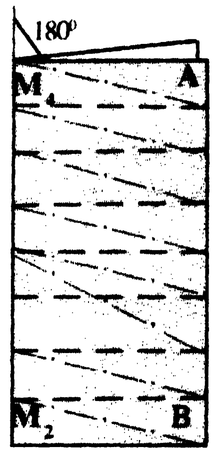
1 . एक सादा बिल्ला लें और उसे खींचकर सपाट करें। अब किताब जैसे उसे बीच में से खोलें।

2 . अब आपको शुरूआत का चौकोर ABCD मिलेगा। इसका बायां आयत ABM_2M_4 दिखने में दाएं आयत M_4M_2CD का दर्पण प्रतिबिंब लगेगा। जरा गौर करने पर आप पाएंगे कि दोनों आयतों के घाटी और पहाड़ी के मोड़ अब बदल गए हैं। अब वर्ग को रेखा M_2M_4 पर काटें और दायां आयत M_4M_2CD लें।

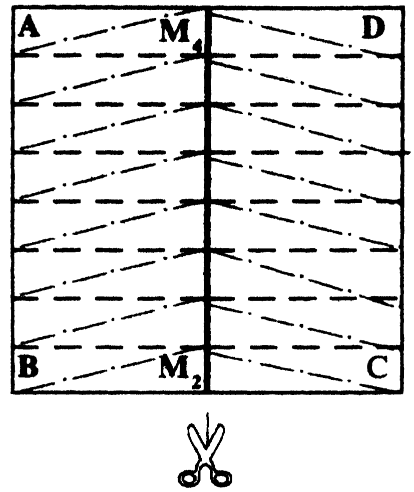
3 . इस आयत में सादे बिल्ले के सभी मोड़ मौजूद होंगे। अब इसमें सामान्य तरीके से एक–एक करके चुन्नट डालें।

4 . इस तरह बना बिल्ला एक तह का होगा।

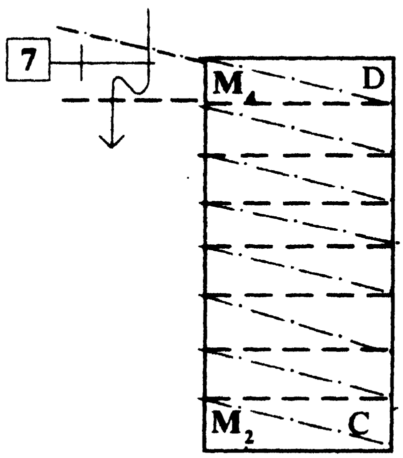
मज़ेदार काम : डिजाइनदार कागज़ की एक लंबी आयताकार पट्टी लें और उसे मोड़ कर एक बधाई–कार्ड बनाएं।



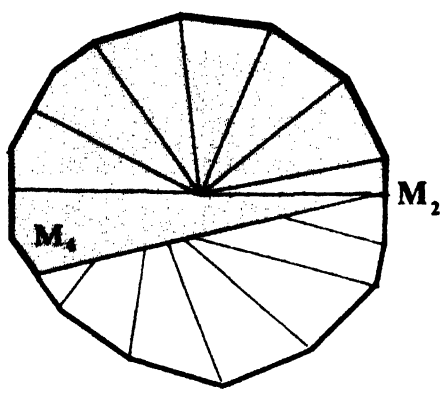
चित्र1 : चपटी स्थिति में सादा बिल्ला



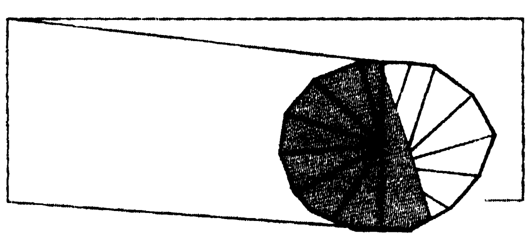
चित्र 2 : सादे बिल्ले को दो भागों में काटें



चित्र 3 : एक तह वाले बिल्ले की समतल पट्टी



चित्र 4 : कागज की एक तह से बना बिल्ला



मज़ेदार काम : कागज की लंबी आयताकार पट्टी से एक बधाई–कार्ड बनाएं।

अध्याय 8

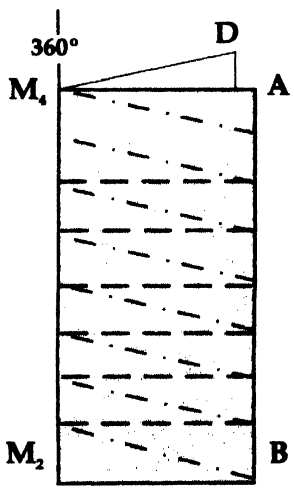
अंदर–बाहर का बिल्ला

इस बिल्ले को डिज़ाइनदार या फिर रंगीन घुटवां कागज़ से बनाएं। अपने अंगूठे को उल्टा करके उसके नाखून से कागज़ पर स्पष्ट मोड़ बनाएं। वर्ग को अब एक समतल ओर सख़्त सतह पर रखें और जम कर मोड़ें। इस बात का जरूर ध्यान रखें कि आयत की कर्ण उसके दानों कोनों को काटे।

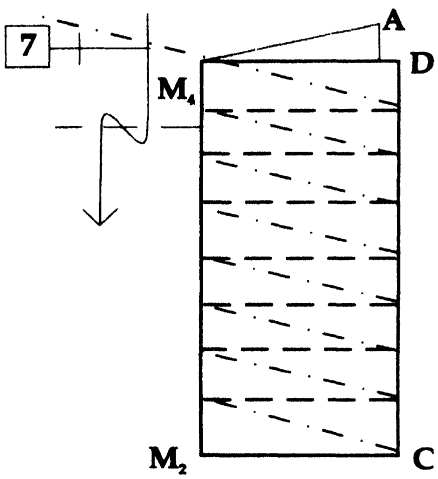
1 . अब चौकोर को किताब जैसे आधे में मोड़ें और उसे चपटा करके रखें। इस तरह बने आयत को आप सादे बिल्ले जैसे ही मोड़ें। आयत को अब उसकी खड़ी मध्य–रेखा M_4M_2 पर खोलें। उसे तब तक मोड़ें जब तक उसके अंदर का हिस्सा बाहर न आ जाए।

2 और 3 अब आप पाएंगे कि आयत का रंग बदल गया है। इस 'बदले रंग' वाले आयत को आप सामान्य तरीके से मोड़ें। इसको अगर आप चुन्नट–दर–चुन्नट मोड़ते रहेंगे तो यह अपने आप ही एक 'अन्दर–बाहर' का बिल्ला बन जाएगा।

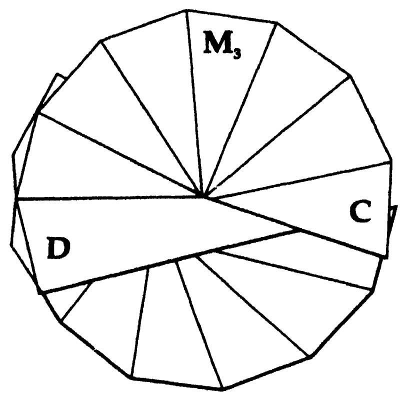
मज़ेदार काम : आप चाहें तो सूरज–चंदा, आधा अध्यक्ष, दीप–ज्योति और अन्य बिल्लों को भी अन्दर से बाहर मोड़ सकते हैं। क्या आपको इनमें रंग बदलता दिखाई दिया?



चित्र 1 : सादा बिल्ले की दोहरी पट्टी



चित्र 2 : अंदर–बाहर मुड़ीं बिल्ले की पट्टियां



चित्र 3 : सफेद रंग का बिल्ला

अध्याय 9

उगते सूरज का बिल्ला

इस बिल्ले को रंगीन कागज़ से बनाएं। इसके लिए लाल चमकीला कागज़ बेहतर रहेगा। बनाते वक्त कागज़ को स्पष्ट मोड़ना न भूलें।

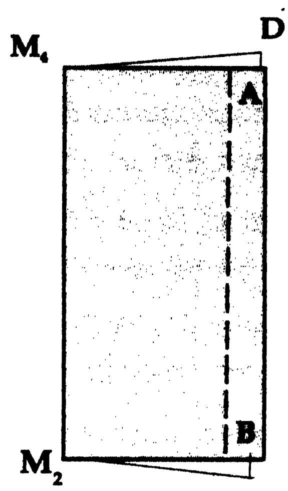
1. कागज को किताब जैसे आधे में मोड़ें और फिर उसे चपटा रखें।

2. कागज़ की ऊपरी परत में एक छोटी पट्टी मोड़ें। पट्टी को चित्र में दिखाए अनुसार खाई जैसे मोड़ें।

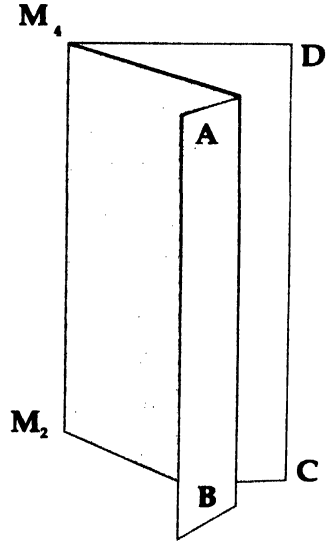
3. इस कागज़ को अब सादे बिल्ले जैसा मोड़ें। बिल्ले को सामान्य तरीके से बनाएं।

4. इस तरह जो बिल्ला बनेगा वह उगते सूरज जैसा दिखेगा।

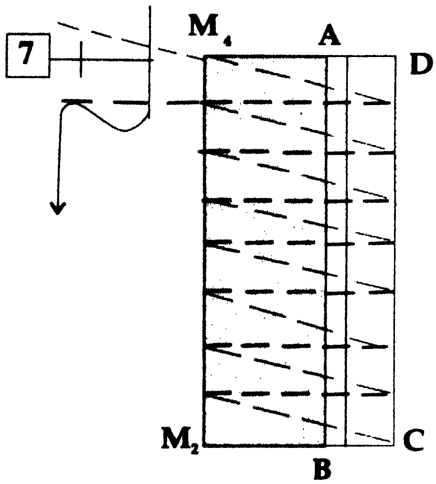
मज़ेदार काम : क्या आप ऐसा बिल्ला बना सकते हैं जिसमें उगता हुआ पूरा गोल सूरज दिखे?



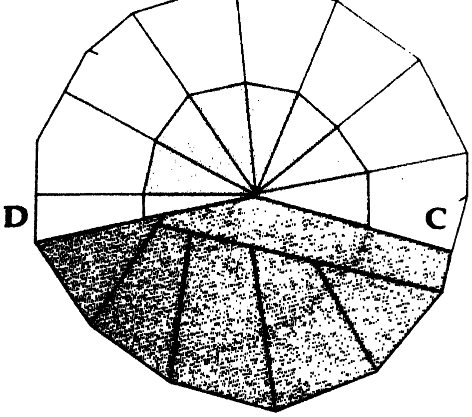
चित्र 1 : किताब जैसा मुड़ा हुआ वर्गाकार कागज़



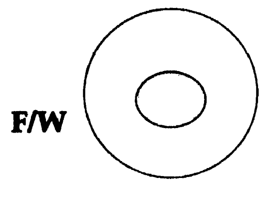
चित्र 2 : बाहर की ओर मुड़ी छोटी पट्टी



चित्र 3 : इस नई पट्टी पर सादा बिल्ला मोड़ें



चित्र 4 : उगते सूरज का बिल्ला



मज़ेदार काम

अध्याय 10

आधे घुमावदार चक्कर वाला बिल्ला

इस बिल्ले को रंगीन कागज़ से बनाएं। अपने अंगूठे को उल्टा करके उसके नाखून से जम कर कागज़ को मोड़ें। कागज़ को एक समतल और सख्त सतह पर रखें। कस कर दबाएं।

1. वर्ग को उसकी खड़ी मध्य–रेखा M_2M_4 पर किताब जैसे मोड़ें।

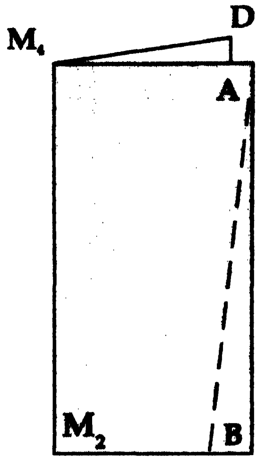
2. ऊपरी तह की एक छोटी सी पट्टी को चित्र में दिखाए अनुसार तिरछा मोड़ें। मोड़, घाटी जैसा हो।

3. अब कागज़ को सादे बिल्ले जैसा मोड़ें और बिल्ले को पूरा बनाएं।

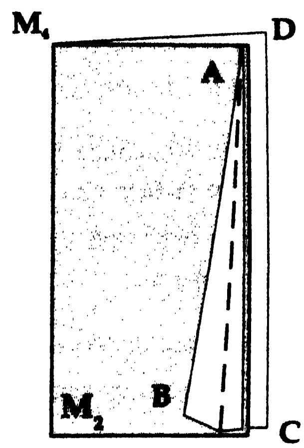
4. इस तरह आधे–घुमावदार चक्कर (स्पाइरल) वाला बिल्ला बन जाएगा।

मज़ेदार काम : 1. क्या आप ऐसा बिल्ला बना सकते हैं जिसमें एक की बजाए दो, आधे–घुमावदार चक्कर हों?

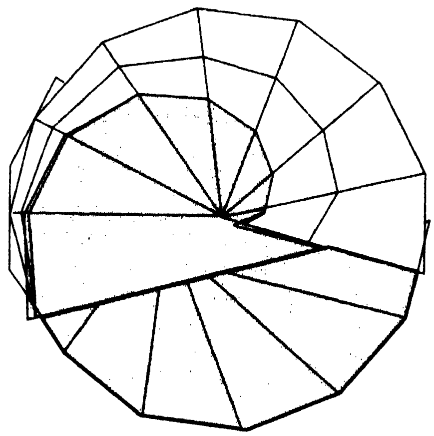
2. क्या आप एक पूरे घुमावदार चक्कर वाला बिल्ला बना सकते हैं?



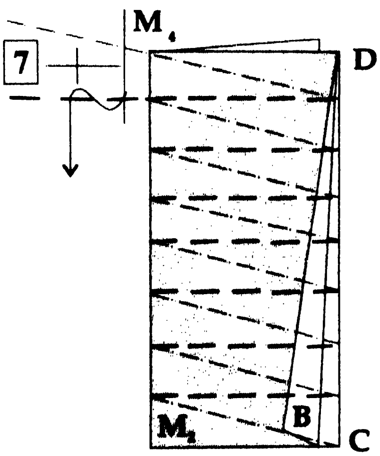
चित्र 1 : वर्ग को किताब की तरह मोड़ें



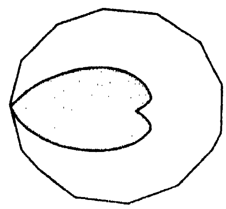
चित्र 2 : ऊपर की तह में एक तिरछी पट्टी मोड़ें



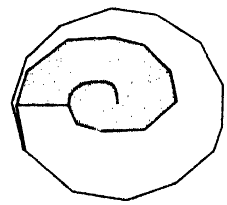
चित्र 4 : आधे घुमावदार चक्कर वाला बिल्ला



चित्र 3 : अब सादे बिल्ले की तरह मोड़ें



मज़ेदार काम : 1



मज़ेदार काम : 2

अध्याय 11

उपाध्यक्ष का आधा बिल्ला

इस बिल्ले को रंगीन कागज़ से बनाएं। साफ और स्पष्ट रूप से मोड़ना न भूलें। अंत में आयत का अनुपात 2×1 का होना चाहिए।

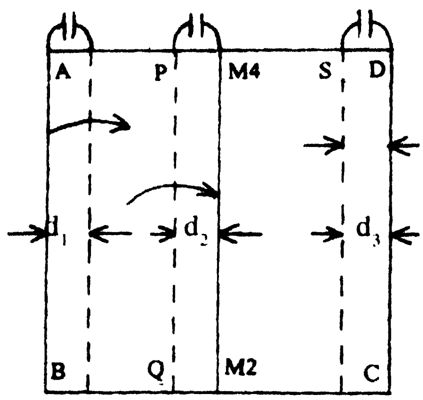
1. अब वर्ग ABCD में $d_1=d_2=d_3$ (जो वर्ग की भुजा की लगभग 1/16 हैं) को चित्र में दिखाए अनुसार मोड़ें। तीरों पर लिखे अंक, मोड़ने का क्रम दर्शाते हैं।

2. क्या आपका आयत देखने में ऐसा लगता है? बहुत अच्छा। इसे चपटा करके रखें।

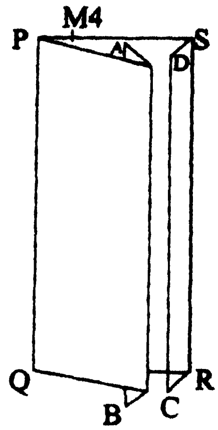
3. सादे बिल्ले जैसा मोड़ कर इस बिल्ले को पूरा बनाएं।

4. इस तरह उपाध्यक्ष का आधा बिल्ला बन जाएगा।

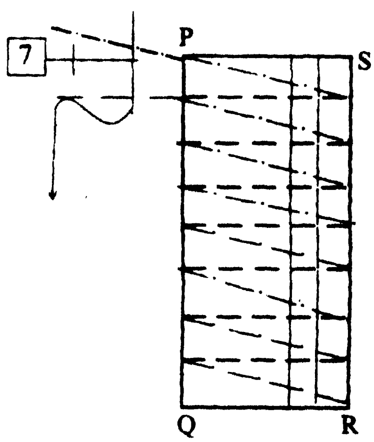
मज़ेदार काम : क्या आप अध्यक्ष का पूरा बिल्ला बना सकते हैं?



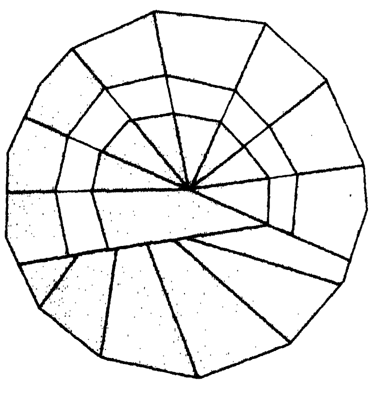
चित्र 1 : मोड़ने का बुनियादी नमूना



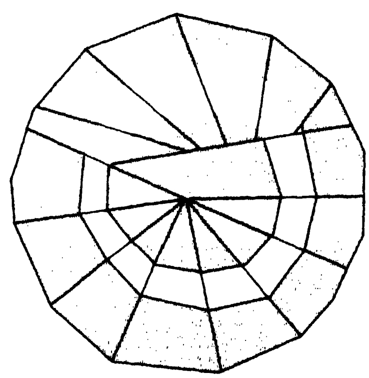
चित्र 2 : बीच में सफेद पट्टियों वाला बिल्ला मोड़ने वाला कागज



चित्र 3 : सादा बिल्ले वाले मोड़



चित्र 4 : पूरा बना उपाध्यक्ष का बिल्ला



मज़ेदार काम : अध्यक्ष का पूरा बिल्ला

सूरज–चांद का बिल्ला

अब आप एक चुनौती के लिए कमर कसें। बहुत सी ओरिगैमी की किताबों में चित्र एक दम संक्षेप में दिए होते हैं। इसलिए आप बीच–बीच में कहीं गलती भी कर सकते हैं। आपको बीच–बीच में अपनी अक्ल भी लगानी पड़ती है। परन्तु अंत में आप इस अभ्यास से अच्छी तरह मोड़ना सीख जाते हैं। इस बिल्ले को आप एक अभ्यास ही समझें। इसमें अधिक से अधिक कुछ चौकोर कागज़ ही खर्च होंगे।

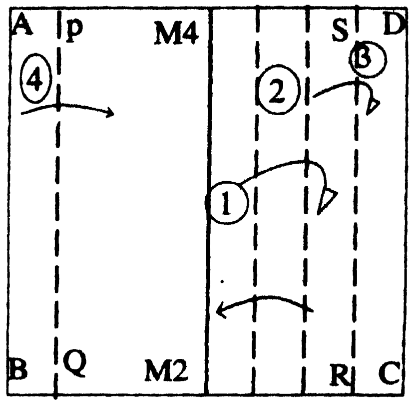
1. चित्र में दिखाई रेखाओं को मोड़ें।

2. क्या आपका आयत कुछ–कुछ ऐसा दिखता है? बहुत खूब। अब आयत को सादे बिल्ले जैसा मोड़ें और चुन्नट–दर–चुन्नट क्रम से मोड़कर बिल्ला बनाएं। अगर कोई कान इधर–उधर बाहर निकल रहा हो तो उनको अन्दर दबा दें।

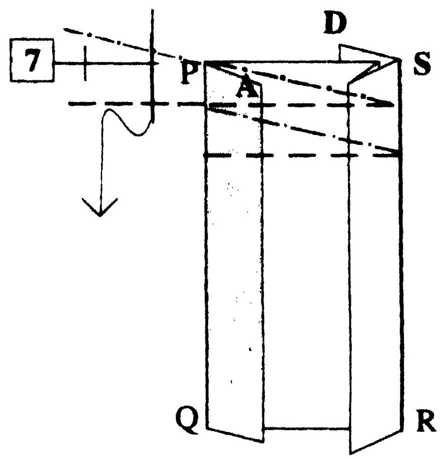
3. इस तरह सूरज–चांद का बिल्ला बन जाएगा।

मज़ेदार काम : 1. चित्र में दिखाए बिल्ले को बनाने की कोशिश करें। बिल्ला थोड़ी गोलाई लिए हो उसके लिए आयत को आठ से अधिक भागों में बांटें।

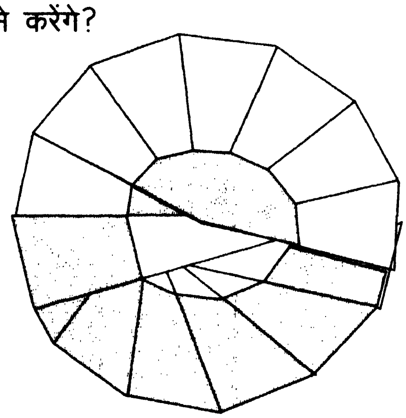
2. बिल्ले के अन्दर बने दो गोले हैं। आप उन के व्यास को कम–ज्यादा कैसे करेंगे?



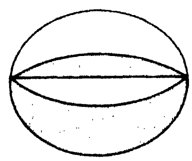
चित्र 1 : मोड़ने का नमूना



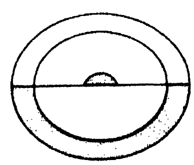
चित्र 2 : सादा बिल्ले जैसा मोड़ें



चित्र 3 : पूरा बना सूरज–चांद का बिल्ला



मज़ेदार काम : 1



मज़ेदार काम : 2

दीप–ज्योति का बिल्ला

इस बिल्ले को रंगीन कागज़ से बनाएं। इस बिल्ले में ज्यामिति का काफी उपयोग होगा। इसलिए बेहतर यही होगा कि आप अपनी पेंसिल और फुटरूल तैयार रखें। अपनी पेंसिल से पहले दो रेखाओं AC और M_1M_3 पर हल्के से निशान लगाएं। आप चाहें तो इन रेखाओं को हल्के से मोड़ भी सकते हैं।

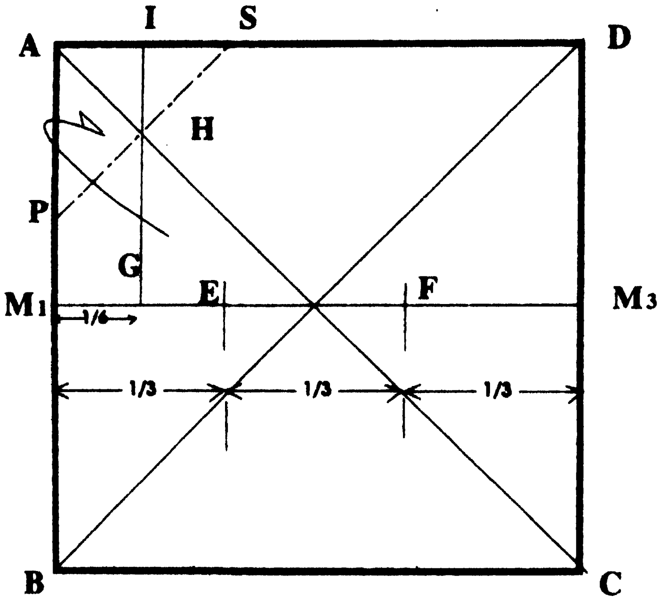
1 (a) अपने वर्ग पर बिन्दु P,H,S,G,E और F को इस तरह दर्शाएं, जिससे

$M_1E = EF = FM_3 = 1/3\ M_1M_3$ और $M_1G = GE = 1/2\ M_1E = 1/6\ M_1M_3$

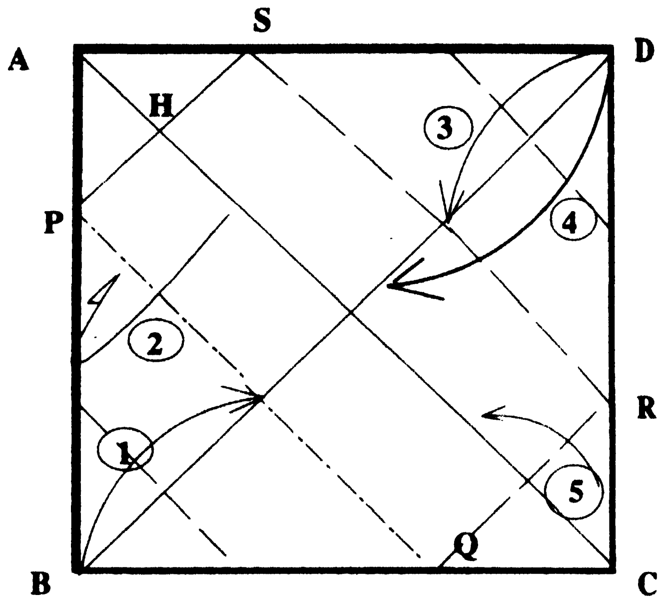
1 (b) अब रेखा GI बनाएं जिससे कि वह रेखा M_1E के लंबवत हो।

1 (c) GI और AC का काट बिन्दु H है। अब रेखा PS बनाएं, जिससे वह लाइन AC के लंबवत हो और बिन्दु H से होकर गुज़रे।

2. PQ और SR रेखाओं को AC के समानान्तर बनाएं। Q और R को रेखाओं से जोड़ें। PQRS एक आयत है। इसको दिखाए गए क्रम के अनुसार मोड़ें।

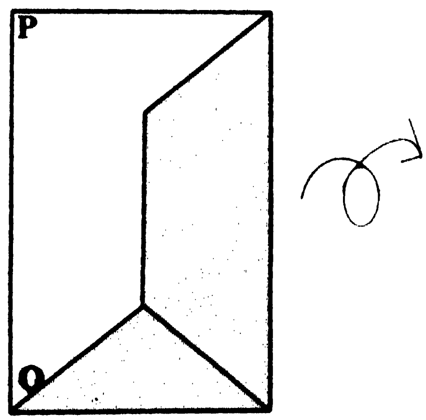


चित्र 1 : मध्यरेखा पर 1/3 और 1/6 के खंडों एवं अन्य बिंदुओं पर निशान लगाएं



चित्र 2 : दीप–ज्योति डिजाइन मोड़ने का नमूना

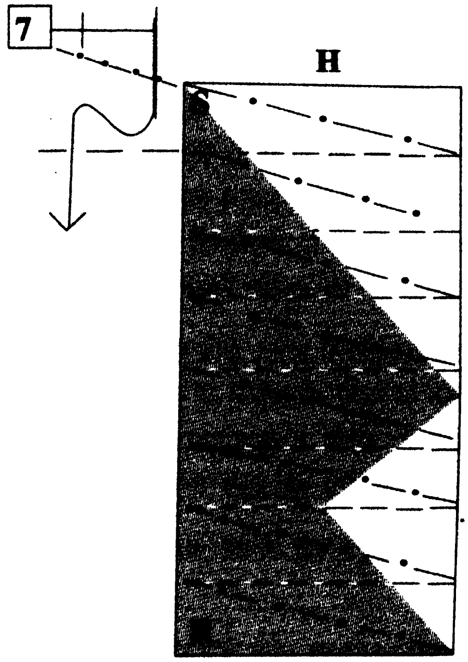
3. क्या आपका कागज अब ऐसा दिखता है? अब कागज को बाएं से दाएं पलटें।



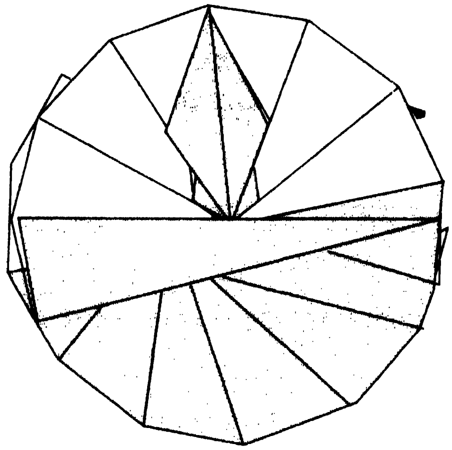
चित्र 3 : दीप–ज्योति मोड़ने वाले कागज की निचली सतह

4. क्या कागज़ की निचली सतह चित्र जैसी दिखती है? बहुत अच्छा ! अब कागज़ को सादे बिल्ले जैसा मोड़ें और पूरा बिल्ला बनाएं।

5. इस तरह एक सुंदर दीप–ज्योति का बिल्ला बन जाएगा।

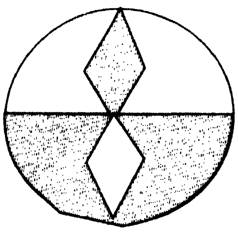


चित्र 4 : सादा बिल्ले की तरह ही मोड़ें



चित्र 5 : पूरा तैयार दीप–ज्योति का बिल्ला

मजे़दार काम : अब ऐसा बिल्ला बनाएं जिसमें दो दीप ज्योतियां हों।



चित्र 6 : दो दीप–ज्योतियों वाला बिल्ला

असंख्य नमूने

आपने बच्चों का खिलौना कलाईडोस्कोप जरूर देखा होगा। इसको घुमाने से बदलती रंग–बिरंगी आकृति दिखाई देती हैं। इससे आप कितने अलग–अलग तरह के नमूने बना सकते हैं? शायद असंख्य! अगर आप हरेक नमूने को केवल आधे मिनट के लिए भी निहारें तो भी सभी नमूनों को देखने में हजारों साल गुज़र जाएंगे! इसी तरह आप एक गोले में असंख्य नमूने बना सकते हैं। क्या इस तरह अलग–अलग नमूनों के बिल्लों को बनाना भी संभव होगा?

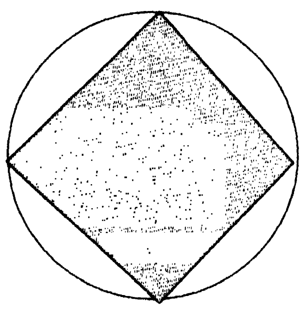
कलाइडोस्कोप में रंगीन कांच की चूड़ियों के टुकड़े एक दूसरे को अलग–अलग तरह से छूते और काटते हैं। बिल्ले बनाते समय चौकोर कागज के आगे और पीछे के रंगीन हिस्सों को अलग–अलग मिलाकर डिजाइन बनाना संभव नहीं होगा। परतु कुछ अन्य संभावनाएं अवश्य हैं। इनमें से कुछ एक संभावनाएं आपने अलग–अलग बिल्ले बनाते हुए देखी ही हैं? यहां कुछ और संभावनाएं दी जा रही हैं। यहां पर दिए हुए कुछ संकेत और नियम अलग–अलग नमूने बनाने में आपकी मदद करेंगे।

(a) कुछ नमूने एक विशेष अक्ष के दोनों ओर एक–समान होंगे। सममिति वाले और असमान नमूनों को समझ–बूझ कर इस्तेमाल करें।

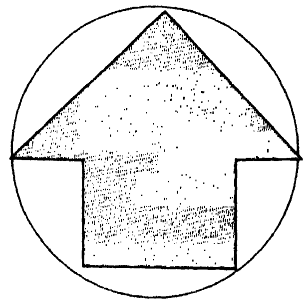
(b) अगर आपको कोई दिक्कत महसूस हो तो पहले नमूने का चित्र एक सादे–सफेद बिल्ले पर बना लें। फिर उसे चपटा खोल कर उस पर बने नमूने का अध्ययन करें।

(c) आप अलग–अलग अनुपात की लंबाई और चौड़ाई वाली पट्टियां ले सकते हैं। पर कृपा कर कागज को काटें और चिपकाएं नहीं। अगर जरूरत हो तो एक से अधिक चौकोर कागजों का इस्तेमाल करें।

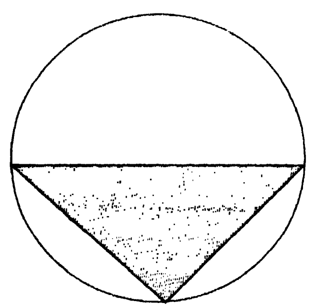
सफलता की शुभकामनाओं सहित!



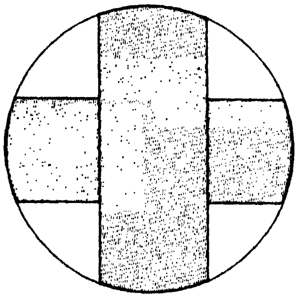
चित्र 1 : गोले के अंदर वर्ग



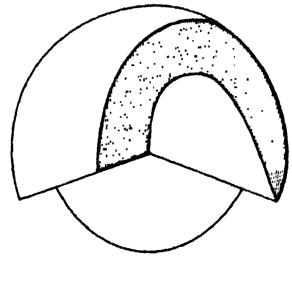
चित्र 2 : घरनुमा आकृति



चित्र 3 : परिवार नियोजन



चित्र 4 : रेड–क्रास



चित्र 5 : स्पेस शेल

तृतीय खंड

गणित

बिल्लों में छिपा गणित का खजाना

बिल्ले देखने में तो सुन्दर और कलात्मक हैं ही पर साथ–साथ उनमें तमाम गणित का ज्ञान भी भरा है। बिल्ला बनाते समय आप गणित की अनुभूति कर सकते हैं और उसे प्रत्यक्ष में देख सकते हैं। इस किताब में जो गणित के अभ्यास दिए हैं उनके लिए आठ खण्डों वाला बिल्ला पर्याप्त होगा। वैसे अगर आयत को अधिक खण्डों में बांट कर बिल्ले बनाए जाएं तो उनसे और बेहतर नतीजे मिलेंगे। बिल्लों के कई इस्तेमाल भी हैं।

बिल्लों के कुछ उपयोग :

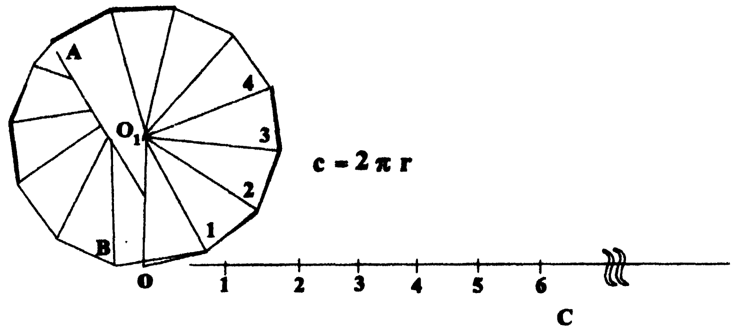
1. बिल्ले की कई बातों का गोल आकृति (वृत्त) के गुणधर्मों से सीधा–सीधा रिश्ता है।

2. गोले की कई प्रमेयों को हम बिल्ले की मदद से सिद्ध कर सकते हैं।

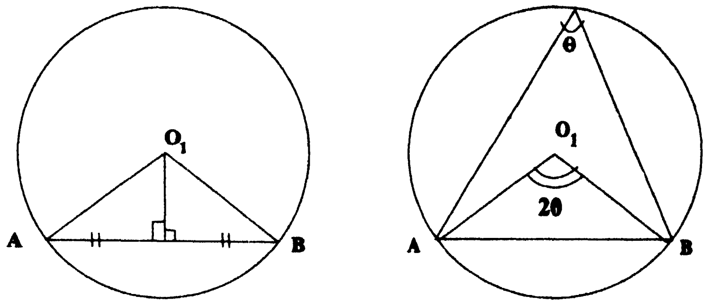
3. Sin, Cos और Tan तरंगों को हम बिल्ले की मदद से आसानी से चित्रों के रूप में दिखा सकते हैं।

4. बिल्लों से हम नियमित बहुभुजी आकृतियां बना सकते हैं।

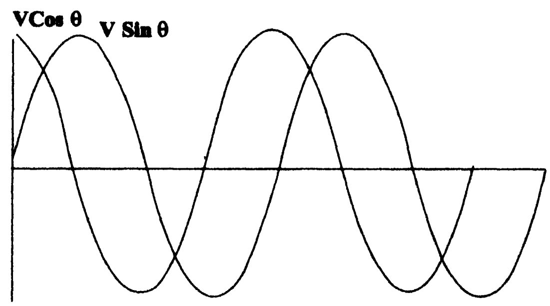
5. गोल बेलनाकार डिब्बों पर गणित के अभ्यास करते समय हम बिल्लों की मदद ले सकते हैं।



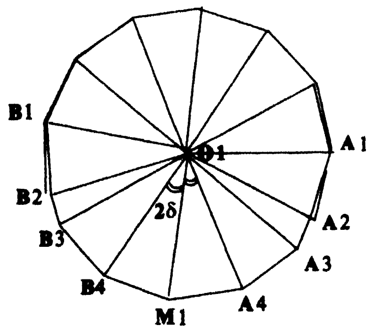
चित्र 1 : गोले की परिधि



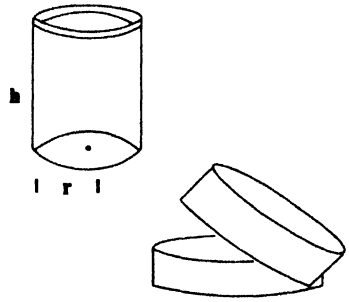
चित्र 2 : वृत्त संबंधी प्रमेय



चित्र 3 : Sin और Cos की तरंगें



चित्र 4 : नियमित बहुभुजी आकृतियां



चित्र 5 : बेलनाकार डिब्बे

6. आप चाहें तो थोड़ी कल्पना से बिल्ले को शंकु में बदल सकते हैं।

7. थोड़ी सी और सजृनशीलता से आप दो मुंह वाला शंकु बना सकते हैं। शंकु के कई कटान जैसे परवलय, अतिवलय आदि को भी आप प्रत्यक्ष में देख सकते हैं।

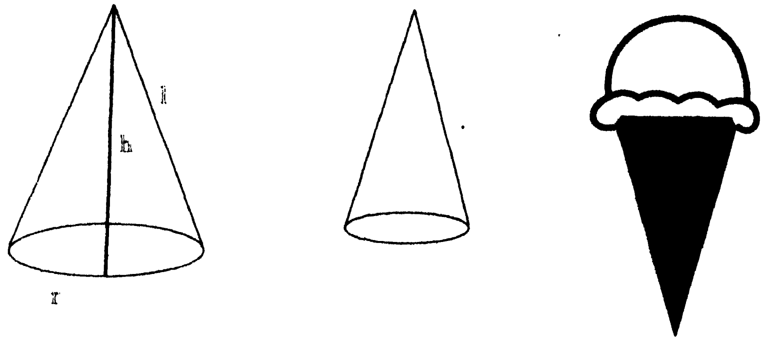
8. बिल्ले को आप डी.एन.ए. का घुमावदार ढांचा बनाने के लिए बखूबी इस्तेमाल कर सकते हैं।

9. बिल्लों का नमूना कंप्यूटर की फ्लापी डिस्क से काफी मिलता–जुलता होता है।

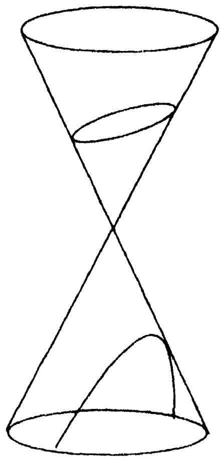
10. बिल्लों से घड़ी के डायल जैसे नमूने बनाए जा सकते हैं और इनका प्राथमिक गणित के अभ्यासों में इस्तेमाल हो सकता है।

11. बिल्लों से प्रतिशत दिखाने के लिए पाई चार्ट बनाए जा सकते हैं।

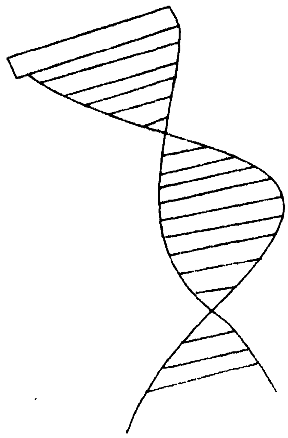
यहां पर बिल्लों के केवल कुछ ही उपयोग सुझाए गए हैं। उनके कई और उपयोग संभव हैं। अब हम इन बिल्लों की मदद से गणित के जगत की सैर करेंगे।



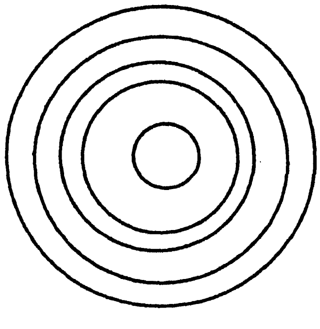
चित्र 6 : दाएं हाथ वाले शंकु



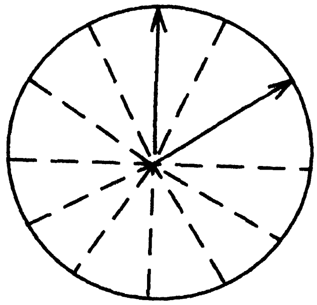
चित्र 7 : शंकु के विभिन्न कटान



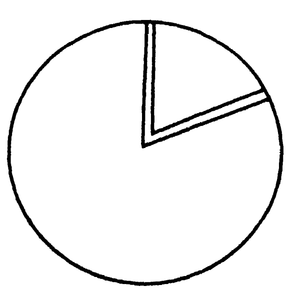
चित्र 8 : डी.एन.ए. का घुमावदार ढांचा



चित्र 9 : कंप्यूटर की फ्लापी–डिस्क के सेक्टर और ट्रैक



चित्र 10 : घड़ी के डायल का डिजाइन



चित्र 11 : प्रतिशत दर्शाने के लिए पाई चार्ट

बिल्ले के ज्यामितीय गुणधर्म

एक सादे बिल्ले में भी ज्यामिति के तमाम उपयोगी गुणधर्म मौजूद हैं। यह गुण धर्म खंडों की संख्या बढ़ने के साथ–साथ बदलते रहते हैं। आइए इनमें से कुछ गुणों को हम खोजें–बीनें।

(1) और (2) आठ खंडों का एक सादा बिल्ला लें। उसे एक आयत जैसा खोलें। सारे कोनों की पहचान के लिए उनको चित्र में दिखाए तरीके से नाम दें। अब बिल्ले के आयत में से ऊपर वाले दो खंड काट दें।

(3) मान लें कि कर्ण P_1A_2 और भुजा P_1A_1 के बीच का कोण d है। अब चित्र में दिखाए अनुसार क्रमबद्ध तरीके से खाई और पहाड़ी मोड़ें। इस बात का ध्यान रखें कि रेखा P_2A_2 की स्थिति वही बनी रहे। बिल्ले के इस हिस्से में केवल दो ही खंड हैं। पर बिल्ले के ज्यामिति गुणों को दिखाने के लिए सिर्फ इतने ही खंड काफी हैं, क्योंकि कोण का मान बिल्ले के बड़ा–छोटा होने पर निर्भर नहीं है।

(4) क्या आपकी दो–खंडों वाली मुड़ी हुई पट्टी, चित्र में दिखाई पट्टी जैसी लगती है? बहुत खूब। अब जरा रेखाओं और कोणों के स्थान परिवर्तन पर गौर फरमाएं। आप पाएंगे कि हरेक खंड, केन्द्र पर d नहीं बल्कि 2d का कोण बनाता है। अब इसके कुछ ज्यामितीय गुणधर्मों को नापें।

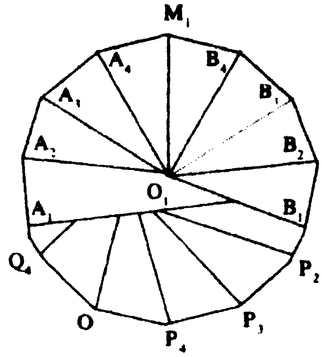
(5) मान लें कि वर्ग की भुजा = 2 इकाई।

इसलिए : $P_1A_1 = 1/2\ AB = 1$ इकाई,

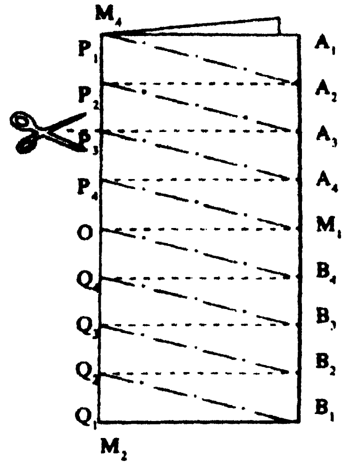
यहां पर सारे नाप, आठ खंड वाले सादे बिल्ले पर आधारित हैं। कर्ण द्वारा बनाया गया कोण

$$\tan\ d = \frac{P_1\ P_2}{P_2\ A_2} = \frac{(1/4)}{1} = 0.25 \text{ इकाई}$$

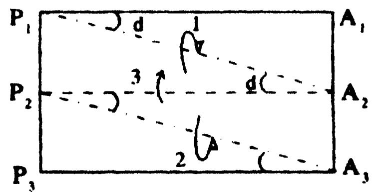
$$d = \tan^{-1}(0.25) = 14^0$$



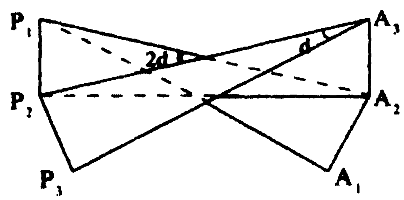
चित्र 1 : आठ खंडों वाला सादा बिल्ला



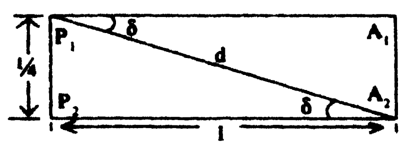
चित्र 2 : सादा बिल्ले को बनाने वाली खुली पट्टी



चित्र 3 : सादा बिल्ले के दो खंडों को काट कर अलग करें



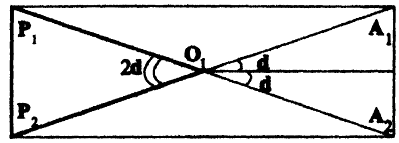
चित्र 4 : दो खंडों में चुन्नटें मोड़ कर उसे बिल्ले का रूप दें



$$\tan d = \frac{P_1\ P_2}{P_2\ A_2}$$

6. एक खंड द्वारा केन्द्र पर बनाया कोण

$$2d = 28^0$$



चित्र 6 : एक खंड केंद्र पर $2d$ का कोण बनाएगा

7. नियमित बहुभुजाओं वाली आकृति :

क्योंकि केन्द्र पर 28^0 का कोण है, इसलिए उसके अनुसार बहुभुजी आकृति की भुजाएं (N) होंगी।

$$N = \frac{360^0}{28^0} = 12.85 \text{ भुजाएं}$$

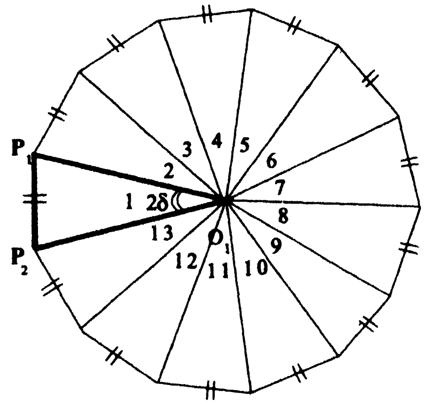
यानी लगभग 13 भुजाओं वाली नियमित आकृति।

8. कर्ण :

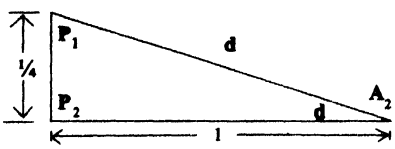
$$d^2 = (P_1P_2)^2 + (P_2A_2)^2$$

$$d^2 = (\tfrac{1}{4})^2 + (1)^2$$

$$d = 1.03$$



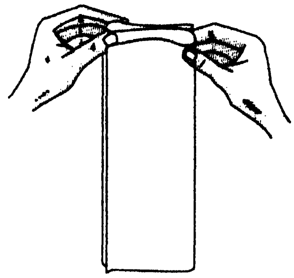
चित्र 7 : सादा बिल्ले द्वारा बनाया एक नियमित बहुभुजी आकार



चित्र 8 : पाइथागोरस तरीके से कर्ण को नापें

विषम संख्या के खंड

अगर आठ से अधिक खंडों के बिल्ले बनाए जाएं तो उनसे गणित के अभ्यास करने की कई और संभावनाएं खुल जाती हैं। ज्यादा खंडों के बिल्ले देखने में भी अधिक सुन्दर लगते हैं। इस तरीके को आप और कई जगह उपयोग कर सकते हैं। इसके लिए अक्सर दो में बांटने वाला 'बाइनरी तरीका' इस्तेमाल किया जाता है। कभी-कभी, जरूरत पड़ने पर तीन हिस्सों में बांटने वाला तरीका भी प्रयोग किया जाता है।



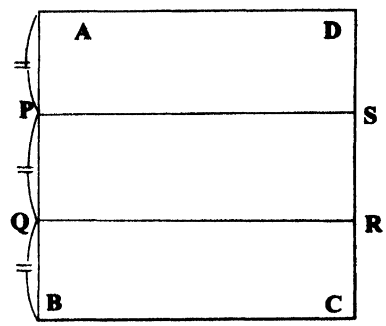
चित्र 1 : धीरे-धीरे, कोशिश करके कागज को तीन भागों में बांटना

तीन बराबर के खंडों में बांटना :

1. इसमें करो, गलती को जांचों और उसे सुधारो वाला तरीका लागू होता है। चित्र में दिखाए अनुसार चौकोर को P और S वक्र के थोड़ा नीचे पकड़ें। अभी मोड़ें नहीं। बाएं और दाएं सिरों को थोड़ा गोल करें जिससे लगभग AP=PQ=QB हो जाए। बारीकी और सफाई के लिए कागज़ को दुबारा जांचें और ठीक करें।

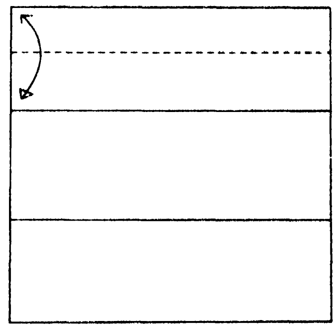
2. अब सिरों को चित्र में दिखाए तरीके के अनुसार मोड़ें।

3. अब प्रत्येक खंड को दो हिस्सों में मोड़ने से चौकोर कुल मिलाकर छह खंडों में बंट जाएगा। अगर 'दो में बांटने' वाले 'बाईनरी' तरीके को दुबारा अपनाया जाए तो कागज़ बारह खंडों में बंट जाएगा। इस तरीके को शुरू में ही अपनाया जा सकता है। इस तरीके से हम कागज को 9 बराबर भागों में नहीं बांट सकते।



चित्र 2 : तीन बराबर हिस्सों में बंटा वर्ग

मज़ेदार काम : आप एक वर्ग को 9 बराबर खंडों में कैसे बांटेंगे?

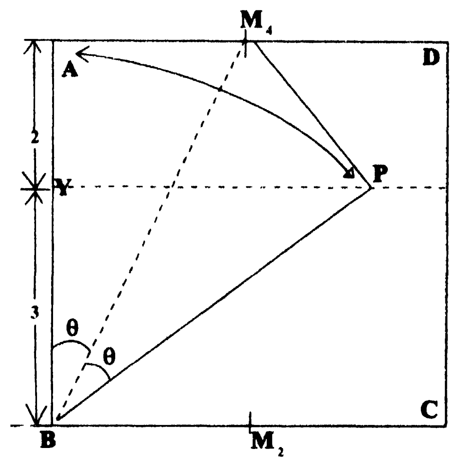


चित्र 3 : छह बराबर भागों में वर्ग को बांटना

पांच बराबर खंडों में बांटना

कागज़ को तीन हिस्सों में बांटने वाला 'करो-गलती सुधारो' वाला तरीका उसे पांच खण्डों में बांटने के लिए उपयुक्त नहीं है। यहां पर दिया तरीका सरल है जिसका उपयोग करके सैद्धांतिक रूप से 99.8 प्रतिशत सही उत्तर मिलने की उम्मीद है।

4. मध्य बिन्दु M_2 और M_4 पर निशान लगाएं। अब रेखा BM_4 पर खाई मोड़ें। कोना A, चौकोर कागज़ को जहां मिले इस बिन्दु को P से दर्शाएं। चौकोर को अब इस तरह मोड़ें जिससे मोड़ रेखा AD के समानांतर हो और बिन्दु P से होकर गुजरे। Y वह बिन्दु है जिस पर यह मोड़ रेखा AB को काटता है। बिन्दु Y, रेखा AB को 2:3 के अनुपात में बांटता है।



चित्र 4 : 2:3 के अनुपात में वर्ग को बांटना

5. खंड AY को दो बराबर हिस्सों में मोड़ें। इस तरह मिला बिन्दु R, स्थिति 1 को दर्शाएगा। कुछ सरल मोड़ों से स्थितियां 2,3,4 मिल जाएंगी। इस प्रकार वर्ग पांच बराबर हिस्सों में बंट जाएगा। इन पांचों खंडों को 'बायनरी मोड़ों' से आसानी से 10 भागों में बांटा जा सकता है।

खंड AY को दो बराबर हिस्सों में मोड़ें। इस तरह मिला मध्य बिन्दु R, स्थिति 1 को दर्शाएगा।

प्रमाण $\tan \theta = \frac{M_4A}{AB} = \frac{1}{2}$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{3}{5} = \frac{YB}{BP}$$

क्योंकि BP = AB = 1 इकाई

इसलिए YB = 0.6 और AY = 0.4 इकाई

सात बराबर के खंडों में बांटना :

चौकोर कागज़ को पांच हिस्सों में बांटने के लिए जो तरीका इस्तेमाल किया है उसी में एक और सरल मोड़ देकर कागज़ को सात हिस्सों में बांटा जा सकता है। कागज़ को चौदह भागों में बांटने के लिए 'दो – में– बांटने वाला' बाइनरी तरीका प्रयोग करें।

6. पांच हिस्सों में बांटने वाले तरीके का इस्तेमाल कर Y_1Y पर निशान लगाएं। इसके लिए चित्र में दिखाए अनुसार M_1,M_3, और कर्ण M_1C का प्रयोग करें।

7. अब B को Y से जोड़ें। इससे रेखा BY_1 के लंबवत रेखा QT मिलेगी। QT रेखा BY को मध्य में काटेगी। कटान बिन्दु Q रेखा AB पर और Y रेखा Y_1Y पर स्थित होंगे। अब बिन्दु Q रेखा AB को 3:4 के अनुपात में बांटेगा।

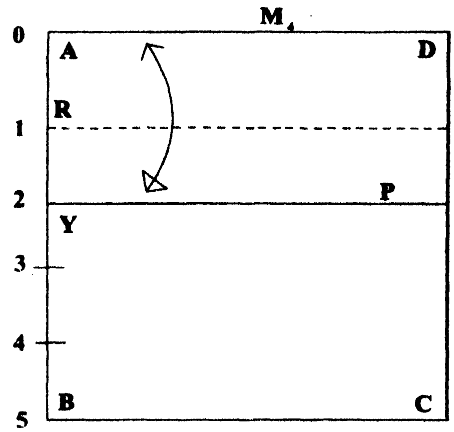
अब आसानी से कुछ सरल मोड़ों द्वारा स्थितियां 1,2,4,5 और 6 ज्ञात की जा सकती है।

8 (a) और (b) : प्रमाण : हमें यह सिद्ध करना है कि

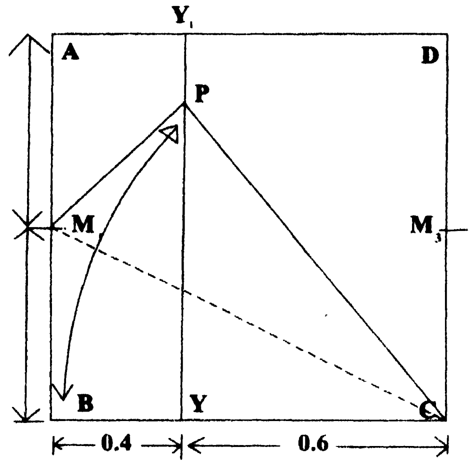
BQ = 4/7 = 0.57

इसके लिए पेंसिल से QY_1, BY_1 और BT रेखाएं बनाएं। 0_1 इनका कटान बिन्दु होगा।

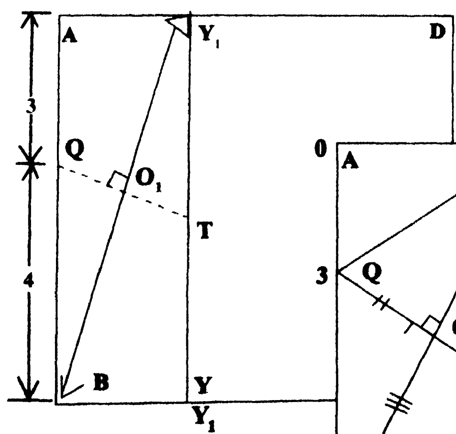
अब $$BQ = \frac{BO_1}{\cos \alpha} = \frac{0.54}{0.928} = 0.58$$



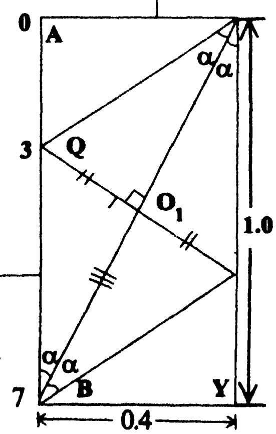
चित्र 5 : पांच बराबर भागों में बांटना



चित्र 6 : 2:3 के अनुपात में बांटना



चित्र 7 : कर्ण Y_1B को लंबवत दो बराबर हिस्सों में बांटने वाला



चित्र 8 : (a) BY_1 और α का मान ज्ञात करना

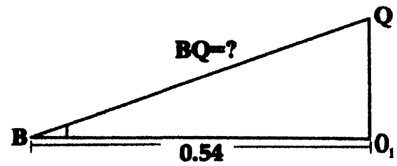
BO_1 और $\cos\alpha$ ज्ञात करना

$$\text{क्योंकि}\quad BO_1 = \tfrac{1}{2}\, BY$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{BY^2 + YY^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(0.4)^2 + 1^2}$$
$$= 0.54$$

$$\text{और}\quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{BY}{YY_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.4}{1}\right) = 21.8^0$$
$$\cos(21.8^0) = 0.928$$

0.57 में 0.01 का अंतर है।

इसमें सैद्धांतिक गलती 2 प्रतिशत से भी कम है।



चित्र 8 : (b) BQ को ज्ञात करना

ग्यारह बराबर भागों में बांटना

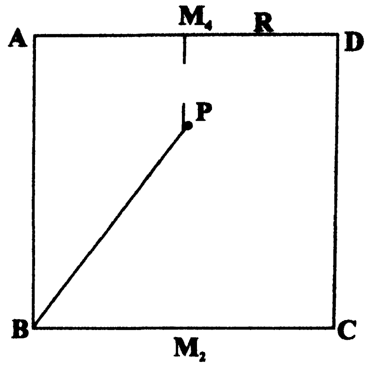
इस सरल तरीके से आप वर्ग को 99 प्रतिशत शुद्धता से ग्यारह बराबर हिस्सों में बांट सकते हैं।

9. एक वर्गाकार कागज़ लें और भुजा BC के मध्य बिन्दु की लंबवत रेखा को बिंदु M_4 के पास केवल थोड़ा सा मोड़ें।

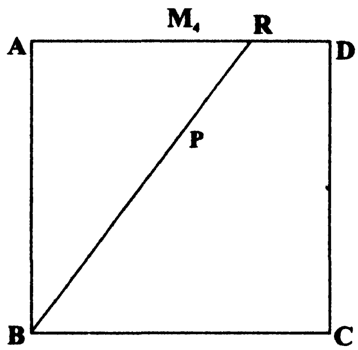
अब B केंद्र बनाकर BC त्रिज्या लेकर M_2M_4 के थोड़े से मोड़ के बिंदु P पर निशान लगाएं। कोई मोड़ नहीं बनाएं।

10. बिंदु B और P को जोड़ने वाली रेखा को घाटी नुमा मोड़ें। इस मोड़ को आगे बढ़ाएं जिससे वो भुजा AD को बिंदु R पर काटे।

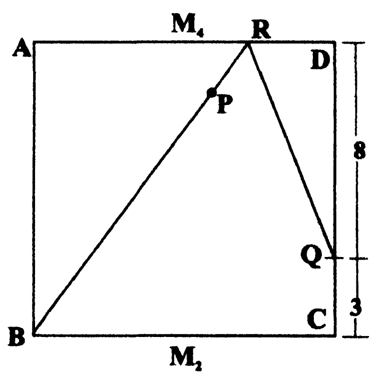
11. रेखा RQ द्वारा कोण DRB को दो बराबर भागों में बांटें। Q रेखा DC को 8:3 के अनुपात में बांटेगा। इसका प्रमाण स्वयं खोजें।



चित्र 9 : M_2M_4 के बिन्दु P पर निशान लगाएं जिससे BP=BC



चित्र 10 : मोड़ BP को बिन्दु R तक आगे बढ़ाएं



चित्र 11 : कोण DRB दो बराबर भागों में विभक्त

गणित के गुणधर्मों की तालिका

पिछले अध्याय में आपने आठ खंडों वाले सादा बिल्ले के सभी गुणधर्मों को खोजने का तरीका देखा। इसी तरीके को हम अलग–अलग खंडों में बंटे बिल्लों पर भी अपनाएंगे। आसान उपयोग के लिए इन नतीजों को एक तालिका में दिया गया है। आप जानते हैं कि :

n = बिल्ले के कुल खंडों की संख्या

l = एक खंड की लंबाई (इकाई में)

$= 2/n$ (वर्ग की एक भुजा = 2 इकाई)

d = कर्ण की लम्बाई (इकाई में)

$= \sqrt{1^2 + l^2}$

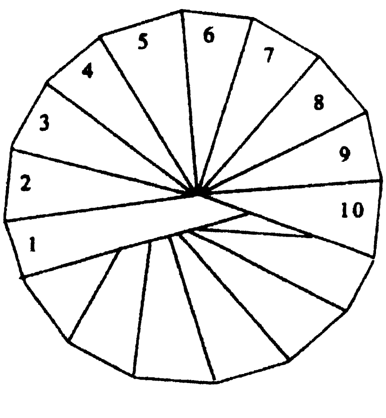
δ = कर्ण और लेटी भुजा के बीच का कोण, अंशों में

$= \tan^{-1}(l)$

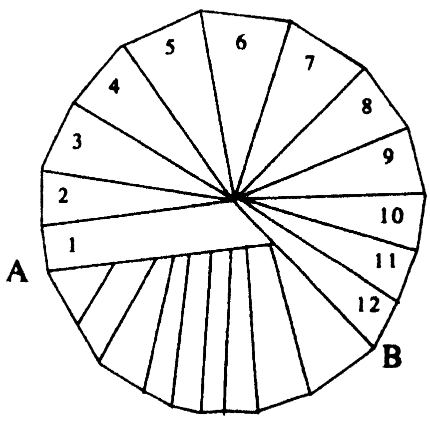
2δ = बिल्ले की प्रत्येक भुजा द्वारा केन्द्र पर बनाया कोण

N = बिल्ले द्वारा बनी नियमित आकृति की भुजाओं की संख्या $= \dfrac{360^0}{2\delta}$

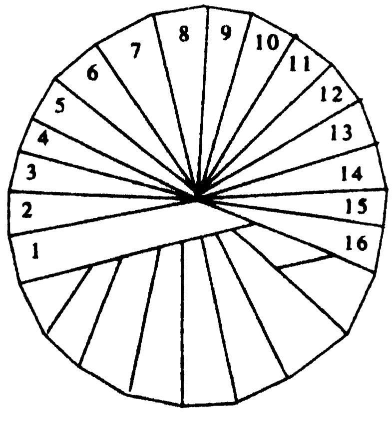
n	l=2/n	d	δ°	2δ°	N
1	2	2.24	63.4	127	2.8
2	1	1.41	45	90	4
3	0.66	1.19	33.7	67.4	5.3
4	0.50	1.12	27	54	6.7
5	0.40	1.08	22	44	8.2
6	0.33	1.05	18	36	10
7	0.29	1.04	15.9	31.8	11.3
8	0.25	1.03	14	28	12.9
9*	0.22	1.024	12.5	25	14.4
10	0.20	1.02	11.4	22.8	15.8



चित्र 1 : दस खंडों वाला बिल्ला



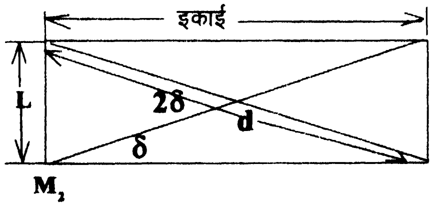
चित्र 2 : बारह खंडों वाला बिल्ला



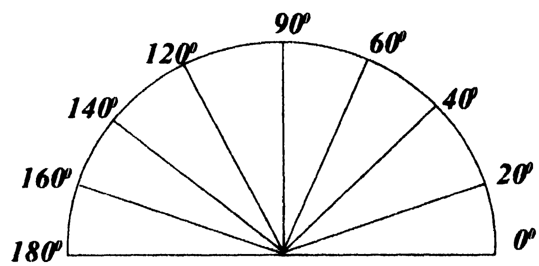
चित्र 3 : सोलह खंडों वाला बिल्ला

n	ι=2/n	d	δ⁰	2δ⁰	N
11	0.18	1.016	10.3	20.6	17.5
12	0.167	1.014	9.5	19	18.9
13*	0.15	1.011	8.8	17.6	20.5
14	0.14	1.010	8.1	16.2	22.2
15*	0.13	1.009	7.6	15.2	23.7
16	0.125	1.008	7.1	14.2	25.4
17*	0.12	1.007	6.7	13.4	26.9
18	0.11	1.006	6.3	12.6	28.6
19	0.1	1.005	5.7	11.4	31.6
20	0.08	1.003	4.7	9.4	38.3

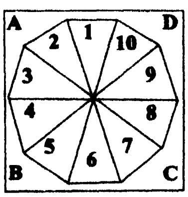
★ इस पुस्तक में कागज को n = 9,13,15,17 खंडों में बांटने का तरीका नहीं बताया गया है।



कर्ण का माप



मज़ेदार काम : (1) एक औरिगैमी का कोणमापी (चांदा) बनाएं, जिससे आप 10 अंश की बारीकी से कोण नाप सकें।



मज़ेदार काम (2) वर्ग से शुरूआत कर एक दस भुजाओं वाली नियमित आकृति बनाएं।

गोल, बिल्ला और नियमित बहुभुजी आकृतियों में तुलना

1. गोल का विकल्प : जैसे–जैसे बिल्ले के खंड बढ़ते जाते हैं, वैसे–वैसे वो अधिक गोलाकार बनता जाता है। इसलिए बिल्ला, गोल आकृति का एक ठोस विकल्प है।

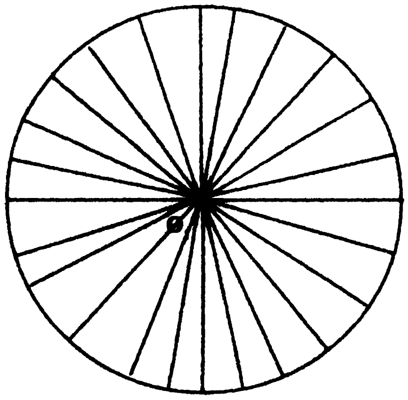
2. निशान : बिल्ले पर एक समान कोण वाली त्रिज्याओं के निशान हैं। इन निशानों के कारण ही गोले के चाप, खंड, केन्द्रीय–कोण आदि को पहचानने और समझने में मदद मिलती है। इससे गोले की कई प्रमेयों को सिद्ध करने में भी मदद मिलती है।

3. बिल्ला और नियमित बहुभुजाओं वाली आकृति : बिल्ले का ढांचा एक बहुभुजाओं वाली आकृति जैसा है। अगर जरूरत हो तो इस ढांचे को 360 अंश तक पूरा किया जा सकता है। इसके लिए बिल्ले के कागज की लंबाई बढ़ानी होगी। सैद्धांतिक रूप में तो एक बिल्ले से सभी नियमित बहुभुजी आकृतियों को बनाना संभव है।

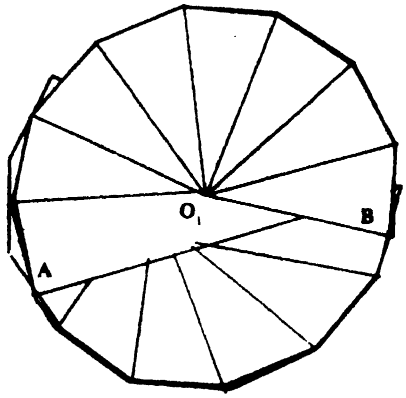
4. अदला–बदली : बिल्ले को खींच कर चपटा बनाकर उसे मूल आयत के आकार में बदला जा सकता है। इस विशेष लक्षण के कारण, हम बहुत आसानी से एक गोल आकृति की परिधि, क्षेत्रफल, आदि मालूम कर सकते हैं।

गोल और बहुभुजी आकृतियों के आगे :

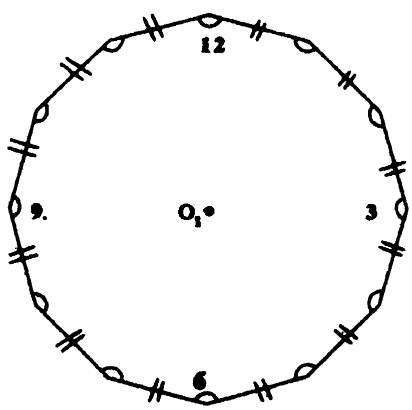
बिल्ले में थोड़ी बदल करके उससे तमाम तरह के ढांचे जैसे बेलनाकार डिब्बे, शंकु, कर्ण चक्र और घुमावदार सीढ़ी आदि बनाए जा सकते हैं।



चित्र 1 : गोल–एक ऐसा बिल्ला जिसमें बहुत सारे खंड हो



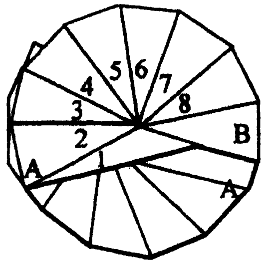
चित्र 2 : निशान वाला बिल्ला



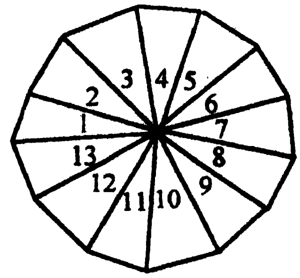
चित्र 3 : बहुभुजी नियमित आकृति

360 अंश के निरंतर वक्र वाला बिल्ला

1(a) और (b) कई बार ऐसे बिल्ले की जरूरत होती है जिसका गोल भाग पूरे 360 अंश का हो। सादा बिल्ले में बिन्दु B के बाद चाप AB निरंतर नहीं होता है। पूरा गोला बनाने के लिए इस चाप में कम–से–कम 13 खंड होना आवश्यक है। किसी बिल्ले में खंडों की संख्या के बढ़ाने मात्र से चाप AB की लंबाई नहीं बढ़ जाती है।



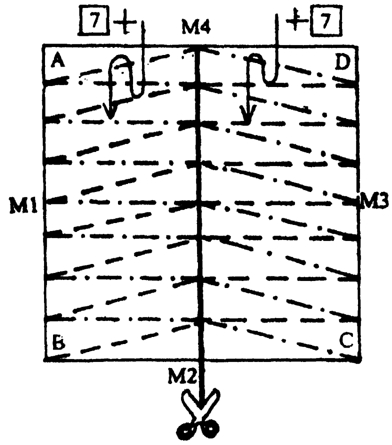
चित्र 1 : (a) 224 अंश कोणीय चाप वाला बिल्ला



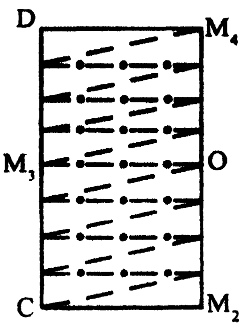
चित्र 1(b) : 360 अंश कोणीय चाप वाला बिल्ला

चलें इस समस्या का कोई सरल हल खोजें।

2. एक सादा बिल्ला लें। उसे खोलकर चपटा करें और उसका मूल वर्ग बनाएं। वर्ग को खड़ी मध्य रेखा M_2M_4 पर काटें जिससे उसके दो अलग–अलग हिस्से को हो जाएं। अब दाएं हिस्से को उल्टा करें। क्या आपको उसमें घाटी और पहाड़ी मोड़ों में अदला–बदली दिखाई पड़ी?



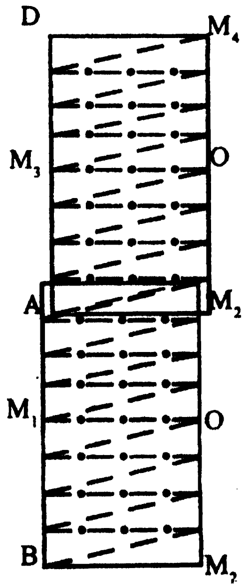
चित्र 2 (a) : सादे बिल्ले को खोल कर उसे दो भागों में काटें



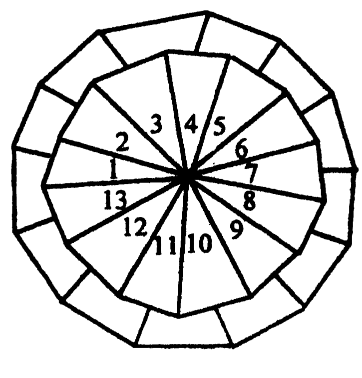
चित्र 2 : (b) दाएं हिस्से को पलटें

3. इस पलटे हुए दाएं हिस्से के ऊपर वाले एक खंड को बाएं हिस्से के निचले खंड से ऊपर जमा कर रखें। इस प्रकार आपको एक मुड़ा हुआ आयत मिलेगा जिसका माप 4 : 1 के अनुपात से थोड़ा सा कम होगा।

4. इस आयताकार पट्टी में चुन्नटें डालें और इसे एक बिल्ले का रूप दें, जिससे उसका चाप लगातार 420° ($28^0 \times 15 = 420^0$) का हो। इसके दोनों अलग–अलग हिस्सों को गोंद से चिपकाने की आवश्यकता नहीं है। इस बिल्ले में संपूर्ण गोले की दो तहें होंगी।



चित्र 3 : एक बिल्ले के दोनों भागों को मिलाएं



चित्र 4 : दो संपूर्ण गोल तहों वाला बिल्ला

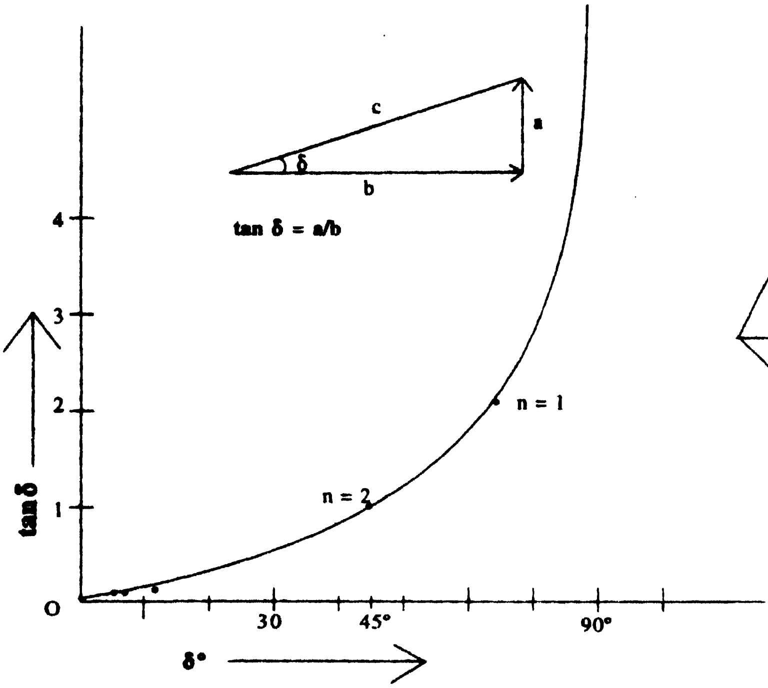
मजेदार काम : आप एक तह का बिल्ला, जिसमें पूरा गोल हो, कैसे बनाएंगे?

अध्याय 21

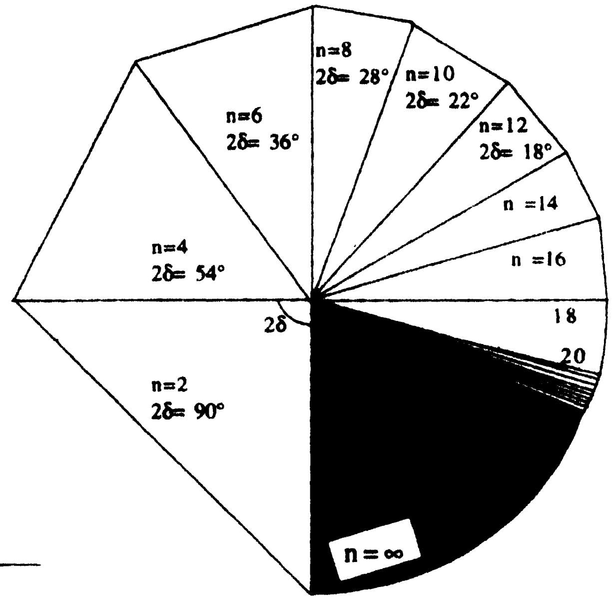
बिल्लों और tan δ का संबंध

(1) tan δ का वक्र : ज्या (sine) और कोज्या (cosine) के ग्राफ की तरह स्पर्श ज्या (tan) का ग्राफ लगातार गोलाई लिए नहीं होता। tan δ का ग्राफ 45 अंश तक सीधा और धीरे उठता है। 45 अंश के बाद वह तेजी से ऊपर उठता है। जल्द ही वह अनंत की ओर बढ़ता है और उसकी निरंतरता टूट जाती है। इसलिए लगातार बदलते हुए ए.सी. वोल्टेज, ध्वनि तरंगों आदि को दर्शाने के लिए उसका इस्तेमाल नहीं किया जा सकता है। पर इसका इस्तेमाल इंजीनियरिंग में भुजाओं, कोणों और ढांचों को नापने के लिए बखूबी किया जाता है। विद्युत नापों में, बहुत छोटे कोणों को tan δ से दिखाया जाता है। विद्युत ऊर्जा के सक्रिय और प्रतिक्रिया वाले हिस्सों को वेक्टर b और a से दिखाया गया है।

(2) बिल्ला मापी : अगर आप अलग–अलग बिल्लों के वक्रों को एक चित्र में दिखाना चाहते हैं तो वह लगभग ऐसा दिखेगा। बिल्ला मापी बनाने का अभ्यास काफी लाभकारी रहेगा।

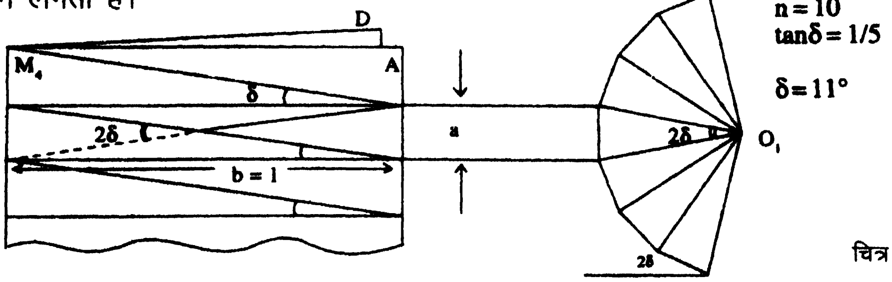


चित्र 1 : tan δ में δ के साथ बदल



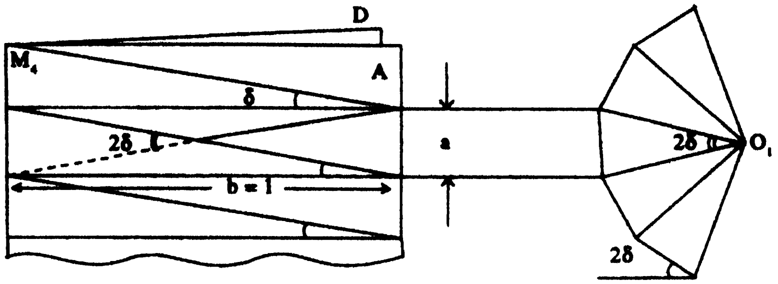
चित्र 2 : बिल्ला मापी

3 से 6. अलग–अलग खंडों के बिल्ले दरअसल में, गणित के संबंध tan δ, के खूबसूरत नमूने हैं। जब खंडों की संख्या को बदला जाता है तब अनुपात tan δ = a/b भी बदलता है। यह बदल, सबसे पहले 45 अंश तक दिखाई देती है। इसी के कारण बिल्ले में गोलाई आती है। 45 अंश के बाद, इस बदल के कारण बिल्ले का अनुपात थोड़ा गड़बड़ा जाता है और इसका आकार थोड़ा भद्दा लगने लगता है।



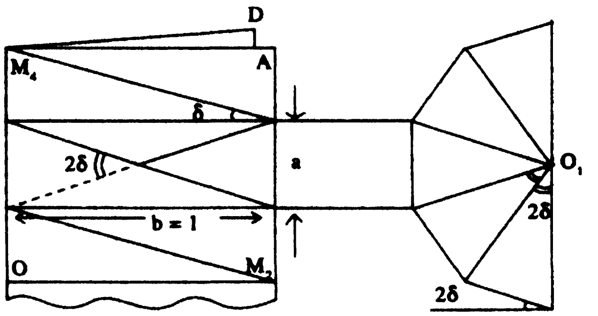
चित्र 3 : दस खंडों वाला बिल्ला

चार बिल्ले इस तरह मोड़ें जिससे उनके n=2,6,8 और 10 हों। सभी बिल्ले एक ही नाप के चौकोर से बने हों। अब अपने नतीजों की नीचे दिए गए चित्रों से तुलना करें।



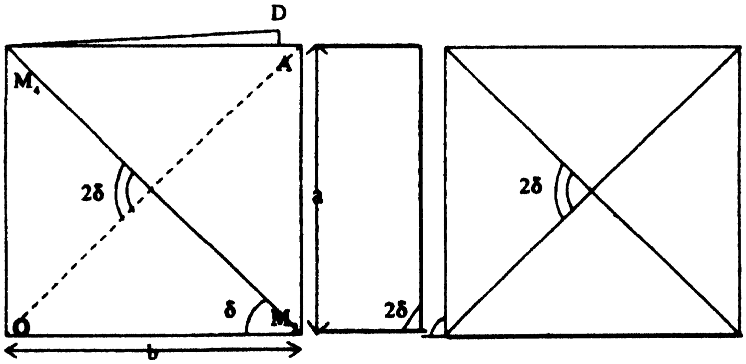
n=8
$\tan \delta = 1/4$
$\delta = 14^0$

चित्र 4 : आठ खंडों वाला बिल्ला



n=6
$\tan \delta = 1/3$
$\delta = 18^0$

चित्र 5 : छह खंडों वाला बिल्ला



n=2
$\tan \delta = 1$
$\delta = 45^0$

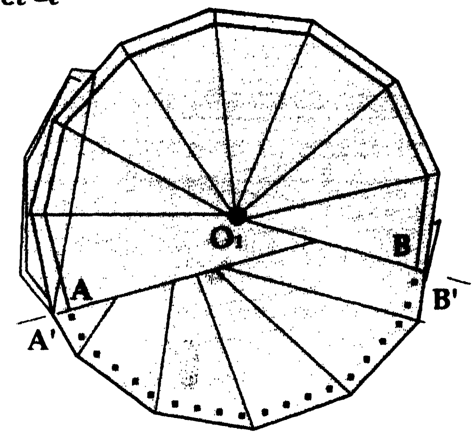
चित्र 6 : दो खंडों वाला बिल्ला

मज़ेदार काम : (1) इस तरह बिल्ले बनाएं जिससे a/b का अनुपात 2 और 4 हो। इसके लिए इतनी लंबी पट्टी जरूर लें जिसमें चार पूरे खंड समा सकें।

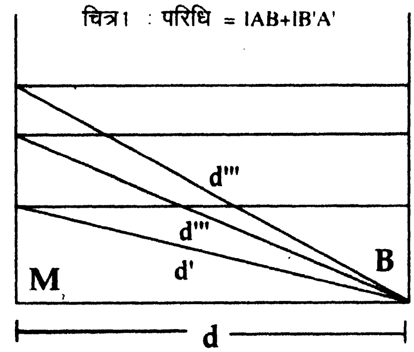
(2) आप इस तरह के बिल्ले कैसे बनाएंगे जिसमें $2\delta = 20^0$ और 30^0 हो?

गोले की परिधि

बिल्लों की मदद से हम गोले की परिधि का सूत्र ज्ञात कर सकते हैं। जैसे–जैसे हम बिल्ले के खंड बढ़ाते हैं, वैसे–वैसे वह एक आदर्श गोले (वृत्त) का रूप लेता जाता है। साथ में हमें जो नतीजे मिलते हैं वह भी अधिक सही होते हैं।



1. एक आठ खंड वाला सादा बिल्ला लें। उसके केंद्र O_1 दो कोनों A और B पर निशान लगाएं। A और B के अनुरूप कागज के पीछे की ओर बिन्दु A' और B' बनाएं। पेंसिल की मदद से, पहले घड़ी की दिशा में कागज की ऊपरी सतह पर A से B तक और फिर निचली सतह पर (घड़ी की उल्टी दिशा में) एक लगातार रेखा बनाएं। पेंसिल द्वारा दर्शायी लम्बाई, गोले की परिधि के बराबर होगी।
   IAB को 'चाप AB की लंबाई जानें'

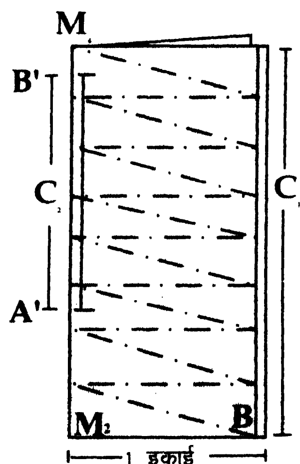


1 इकाई

चित्र 2 : एक इकाई खंडों के साथ व्यास में आया बदलाव

2. बिल्ले द्वारा गोले की परिधि ज्ञात करने के तरीके में हमने यह माना है कि जैसे–जैसे बिल्ले के खंड बढ़ते हैं, वैसे–वैसे आयत की कर्ण की लम्बाई, आयत की भुजा के बराबर यानि 1 इकाई, होती चली जाती है। इसलिए अधिक खंडों के बिल्ले से ज्यादा सही नतीजे मिलते हैं।

3. अब बिल्ले को खोलकर एक चपटा आयत बनाएं।



चित्र 3: परिधि $C = \frac{C_1 + C_2}{n/2}$

4. नीचे की तालिका में।

n = बिल्ले के आयत में खंडों की संख्या

C_1 = गोल चाप A B की लम्बाई, खंडों की संख्या में

C_2 = गोल चाप A'B' की लम्बाई, खंडों की संख्या में

$C_1 + C_2$ = गोले की कुल परिधि, खंडों की संख्या में

$C = \frac{C_1 + C}{n/2}$ = गोले की परिधि, इकाइयों में

अब 10, 12 और 14 खंडों के बिल्ले बनाएं और उनके नतीजों की इसी तरह से तालिका बनाएं।

इस तरीके से हम π (पाई) का मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

n	C_1	C_2	$C = \frac{C_1 + C_2}{n/2}$
08	08	4.83	3.20
10	10	5.80	3.16
12	12	6.90	3.15
14	14	8.00	(22/7) =3.14

चित्र 4 : खंडों की संख्या बढ़ने के साथ परिधि में आई बदल की तालिका

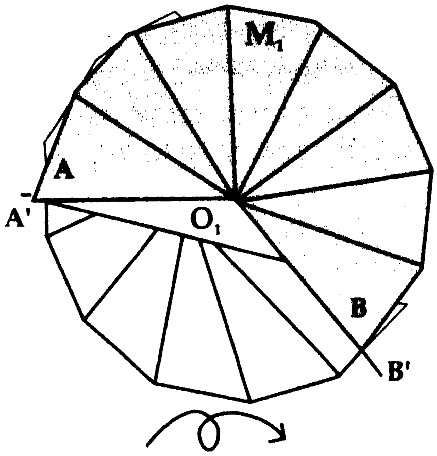
अध्याय 23

गोले का क्षेत्रफल

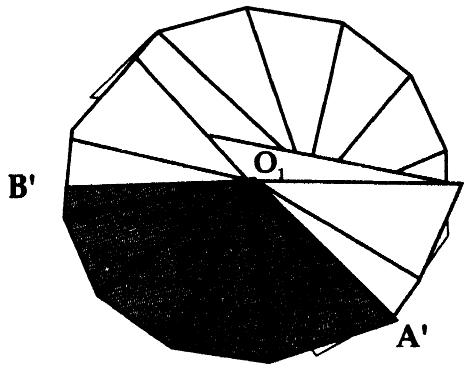
बिल्लों की मदद से हम गोले के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात कर सकते हैं। ज्यादा खंडों वाले बिल्ले से हमें अधिक शुद्ध और सही नतीजे मिलते हैं।

1 और 2 : एक सादा, आठ खंडों वाला बिल्ला लेकर उस पर O_1, A, B, A^1 और B^1 निशान लगाएं। यह निशान आपने गोले की परिधि जानने के लिए भी लगाए थे। इसके अलावा कागज की ऊपरी सतह पर रेखाएं AO_1 और BO_1 और कागज की निचली सतह पर रेखाएं A^1O_1 और B^1O_1 बनाएं। अब पेंसिल से ऊपरी सतह पर खंड AO_1B और निचली सतह पर खंड $B^1O_1A^1$ को रंग दें।

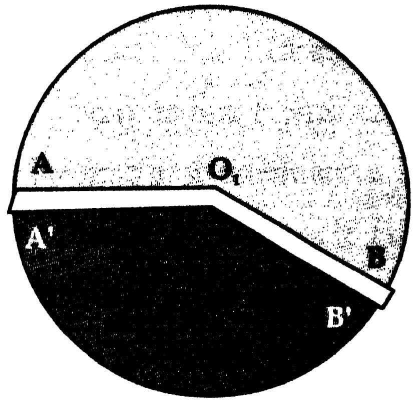
3. रंगा हुआ सारा क्षेत्रफल, गोले का क्षेत्रफल होगा।



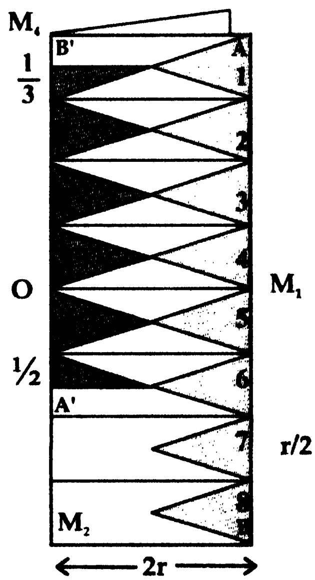
चित्र 1 : रंगीन भाग खंड O_1AB का क्षेत्रफल



चित्र 2 : रंगीन भाग खंड $O_1A'B'$ का क्षेत्रफल



चित्र 3 : O_1AB और $O_1A'B'$ खंडों का कुल क्षेत्रफल



2 इकाई

चित्र 4 : गोले का क्षेत्रफल समरूप समद्विबाहु

ऐसा मानें कि वर्ग की भुजा हर बार 4 इकाईयों के बराबर है।

4. अब बिल्ले को खोल कर एक चपटा आयत बनाएं। (r=1 इकाई)

खंड AO_1B का क्षेत्रफल

= दाहिने हाथ के सारे रंगीन त्रिकोणों के क्षेत्रफलों का योग

= 8× एक त्रिकोण का क्षेत्रफल $\Delta = 8 \times 1/4$

= 2 वर्ग इकाई

इसी तरह से, खंड $B'O_1A'$ का क्षेत्रफल

$= (1/2+4+1/3) \times 1/4 = 1.2$ वर्ग इकाई

गोले का क्षेत्रफल

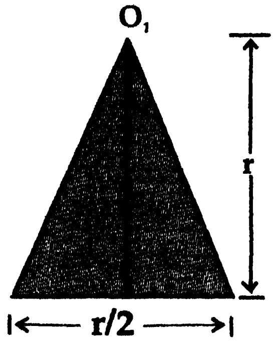
= खंड AO_1B का क्षेत्रफल+खंड $B'O_1A'$ का क्षेत्रफल

$= 2+1.2 = 3.2$ वर्ग इकाई

5. समद्विबाहु त्रिकोण का क्षेत्रफल

$= 1/2$ आधार ×ऊंचाई $= 1/2 \times r/2 \times r = 1/2 \times 1/2 \times 1$

$= 1/4$ वर्ग इकाई ($r = 1$ इकाई)



Δ *क्षेत्रफल* **= 1/4** *इकाईयां*

चित्र 5 : आठ खंड़ों वाले बिल्ले के लिए एक समद्विबाहु त्रिकोण का क्षेत्रफल

6. इस तालिका में अलग–अलग खंडों वाले बिल्लों का क्षेत्रफल दिया गया है।

$n =$ बिल्ले में खंडों की संख्या

$\Delta =$ एक त्रिकोण का क्षेत्रफल, वर्ग इकाईयों में

$AO_1B =$ खंड AO_1B में त्रिकोणों की संख्या

$A'O_1B' =$ खंड $B'O_1A'$ में त्रिकोणों की संख्या

$A =$ गोले को क्षेत्रफल, वर्ग इकाईयों में

n	Δ	**AO_1B**	**$B'O_1A'$**	$A = (AO_1B' + B'O_1A') \times \bar{\Delta}$
8	1/4	08	4.83	3.2
10	1/5	10	5.8	3.16
12	1/6	12	6.9	3.15
14	1/7	14	8	3.14

चित्र 6 : विभिन्न बिल्लों के क्षेत्रफलों की तालिका

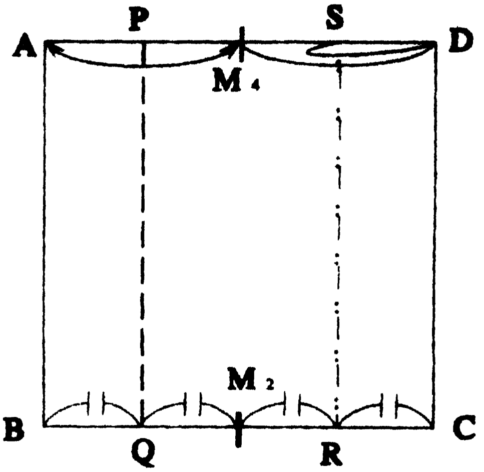
दायां बेलनाकार डिब्बा (उथला)

अगली बार मित्रों को उपहार देते समय आप अपनी भेंट को एक ढक्कन वाले, सुन्दर गोल डिब्बे में बंद कर के दें। एक ही नाप के चौकोर कागज से अलग–अलग आकार के गोल डिब्बे बनाना संभव है!

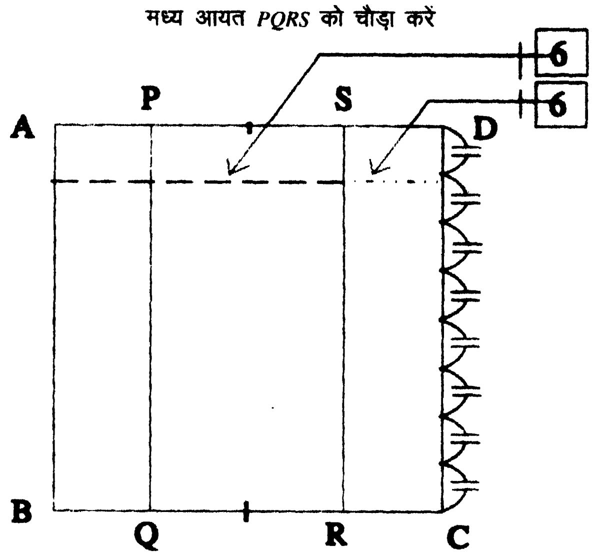
1. M_2 और M_4 पर निशान लगाएं। मध्य–रेखा M_2M_4 को मोड़ें नहीं। बिन्दु P,Q,R,S पर भी चित्र में दिखाए अनुसार निशान लगाएं। PQ पर खाई मोड़ें और खोलें। रेखा SR पर पहाड़ी मोड़ें और खोलें।
2. अब चौकोर को आठ बराबर लेटे खंडों में बांटें। खड़ी रेखा SR के बाएं हाथ के सभी मोड़ घाटी–नुमा होंगे। SR के दाएं हाथ के सारे मोड़ पहाड़ी–नुमा होंगे।
3. अब बीच के आयत PQRS में सादे बिल्ले के ही जैसे सभी कर्णों को पहाड़ी–नुमा मोड़ें और खोलें। AT को 1/5 AP के बराबर लें। TU को खाई जैसे मोड़े और खोलें। WV को AT के मुकाबले थोड़ा सा छोटा लें। WV को पहाड़ी जैसा मोड़ें और खोलें। इन पट्टियों से बेलनाकार डिब्बे की तालाबन्दी में मदद मिलेगी और डिब्बा खुल कर चपटा कागज नहीं बनेगा।
4. अब सारे मोड़ों से लैस इस चौकोर कागज को सावधानी से अध्याय 27 में दिखाए तरीके के अनुसार घुमाकर मोड़ें। R और P सिरों के स्थानों को आपस में बदलें। गोल आधार की पंखुड़ियों को एक–दूसरे में फंसा दें। डिब्बे की दीवार की पट्टियों TV और WV को भी एक–दूसरे पर मोड़ दें।

अब आपका गोल पेंदे वाला डिब्बा भेंट के लिए तैयार है।

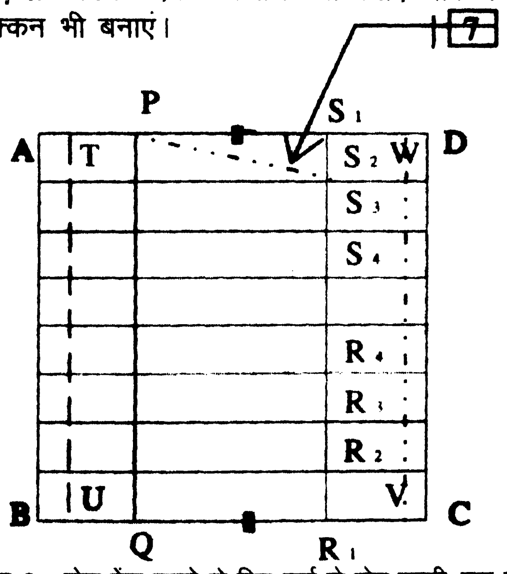
मजेदार काम : एक उथला डिब्बा बनाएं और अलग से उसका ढक्कन भी बनाएं।



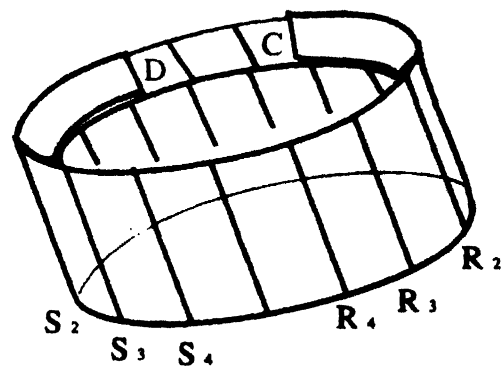
चित्र 1 : उथला बेलनाकार डिब्बा बनाने के लिए मध्य आयत *PQRS* को चौड़ा करें



चित्र 2 : सामान्य आठ खंड के मोड़



चित्र 3 : गोल पेंदा बनाने के लिए कर्ण के मोड़ पहाड़ी–नुमा बनाएं



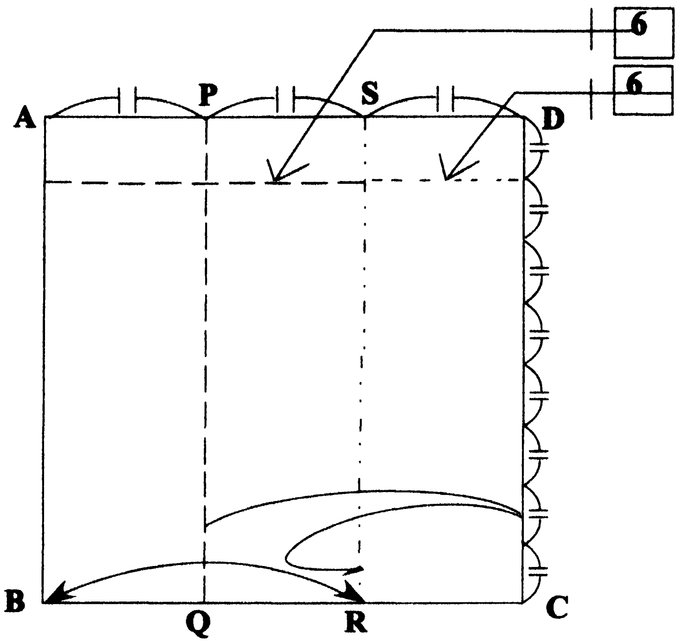
चित्र 4 : बेलनाकार डिब्बा पेंदे के साथ

दायां बेलनाकार डिब्बा (गहरा)

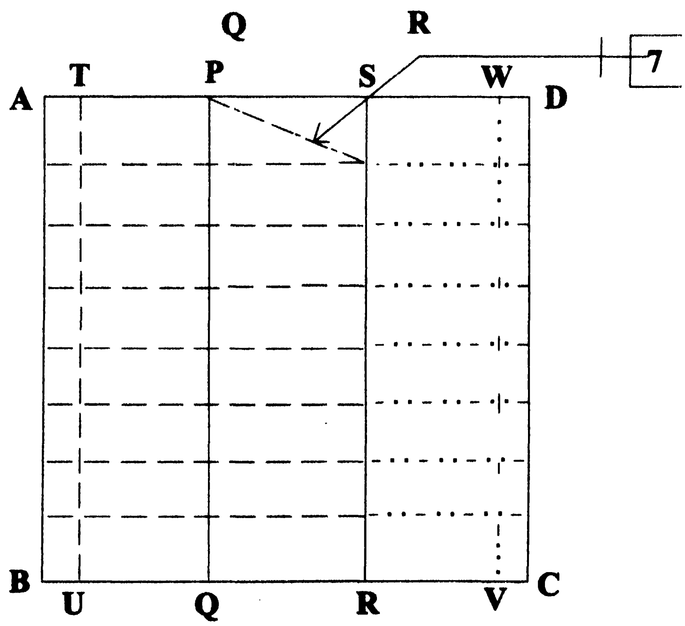
गोल पेंदे वाले गहरे डिब्बों को बनाने का तरीका लगभग उथले डिब्बे बनाने जैसा ही है। गहरे डिब्बों में बस बीच के आयत PQRS का नाप अलग होता है।

1. चौकोर को बराबर के तीन खंडों में मोड़ें। इसमें रेखा PQ पर घाटी और रेखा SR पर पहाड़ी का मोड़ होगा। अब वर्ग को एक–बराबर के आठ लेटे खंडों में बांटें। खड़ी रेखा SR के बाएं के सभी मोड़ घाटी–नुमा हों, और दाएं के सभी मोड़ पहाड़ी–नुमा हों। आप ज्यादा सही नतीजों के लिए वर्ग को आठ की बजाए 10 या 12 खंडों में भी बांट सकते हैं।
2. अब बीच के आयत PQRS में बिल्ले की तरह सारी कर्णों को पहाड़ी जैसे मोड़ें। पतली पट्टियों TU और WV को भी मोड़ें और खोलें। अगर जरूरत हो तो सभी मोड़ों को एक बार फिर से जम कर मोड़ दें।
3. अब मोड़ों से भरे इस कागज़ को सावधानी से अध्याय 27 पर दिखाए चरणों के हिसाब से मोड़ें।

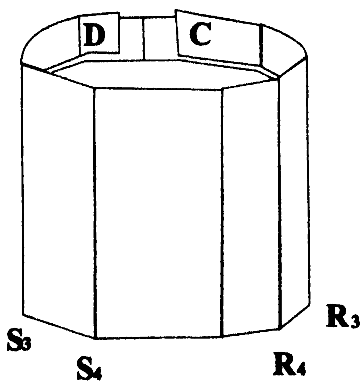
गहरे डिब्बे में, उथले डिब्बे की अपेक्षाकृत कागज़ की कई परतें एक दूसरे पर आकर लिपट जाती हैं। क्या आपने इस बात पर गौर किया? गणित से इसका स्पष्टीकरण आगे के अध्याय में किया गया है।



चित्र 1 : गहरे बेलनाकार डिब्बे के लिए बीच का आयत सकरा हो



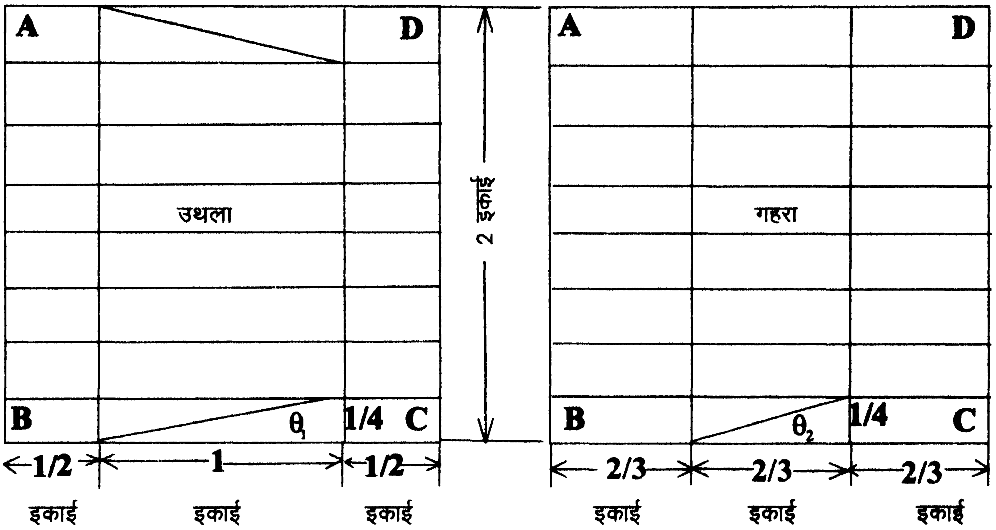
चित्र 2 : सामान्य आठ खंडों वाला मोड़



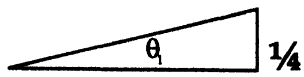
चित्र 3 : ऊपर की किनार पर ताला लगी पट्टी वाला गहरा डिब्बा

उथले और गहरे बेलनाकार डिब्बों के गणितीय गुणधर्मों की तुलना

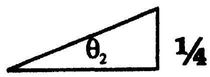
1 . चौड़ाईयों का अनुपात



2 . एक खंड द्वारा बनाया गया कोण

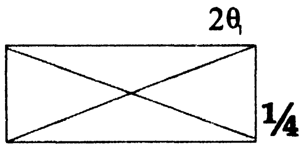


$\theta_1 = \tan^{-1}(1/4)$
$= 13.8°$
$= 14°$

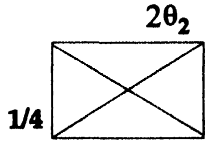


$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1/4}{2/3}\right)$
$= \tan^{-1}(3/8)$
$20.5°$

3 . एक खंड द्वारा बनाया गया सेक्टर कोण

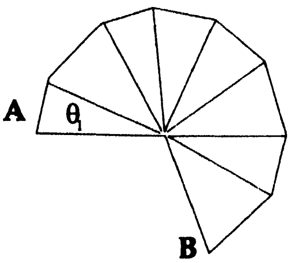


$2\theta_1 = 28°$

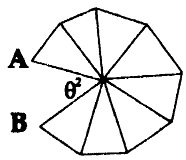


$2\theta_2 = 41°$

4 . वर्ग की एक भुजा द्वारा बनाया गया सेक्टर कोण (180° से अधिक होना चाहिए)

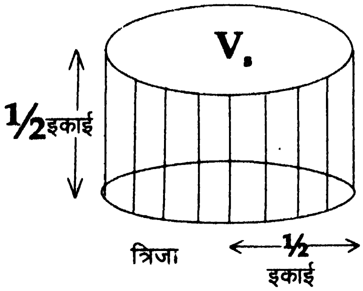


$2\theta_1 \times 8 = 224°$

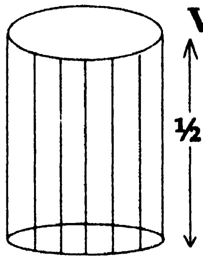


$2\theta_2 \times 8 = 328°$

5 . बेलनाकार डिब्बे का आयतन V = आधार का क्षेत्रफल × = ऊंचाई = $\pi r^2 \times h$



$V_s = \pi (½)^2 \times ½$
$= 0.39$ घन इकाई
$= 0.4$ घन इकाई



$V_d = \pi (1/6)^2 \times 2/3$
$= 0.2326$ घन इकाई
$= .02$ घन इकाई
लगभग आधा V_s के

6 . ऊपर से लिपटने वाला अधिक कोण (180 अंश से कम हो)

$\frac{448° - 360°}{2} = 44°$

$\frac{656° - 360°}{2} = 148°$

7 . दो तहों द्वारा बनाया कुल सेक्टर कोण (360 से अधिक और 720 से कम हो)

$224° \times 8 = 448°$

$328° \times 8 = 656°$

अध्याय 27

दायां बेलनाकार डिब्बा : आम तरकीबें

यहां पर कुछ तरकीबें दी हैं जिनका अभ्यास करके आप गोल पेंदे वाले डिब्बे बनाने में कुशलता हासिल कर सकते हैं।

सावधानियां

(a) हमेशा पतला और मजबूत कागज इस्तेमाल करें। इंजीनियरिंग की तकनीकी ड्राइंग वाला ट्रेसिंग–पेपर इसके लिए सबसे अच्छा है।

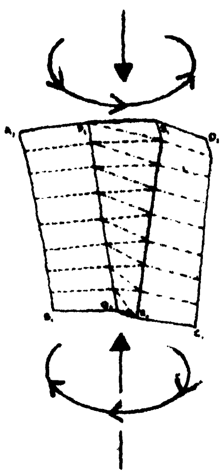
(b) जिन मोड़ों की आवश्यकता न हो उन्हें बिल्कुल नहीं बनाएं। मिसाल के तौर पर मध्य–रेखा M_2M_4 को कभी भी नहीं मोड़ें। वैसे आपको M_2 और M_4 की स्थितियों पर निशान लगाना ही पड़ेगा।

(c) सारे मोड़ एकदम साफ और स्पष्ट हों। आप मोड़ों को चाकू के प्लास्टिक हैंडिल, या पेंचकस से जम कर दबा कर स्पष्ट बना सकते हैं। वैसे अंत में सभी मोड़ों को अंगूठे को उल्टा कर उसके नाखून से मोड़ना ही सबसे बेहतर होगा।

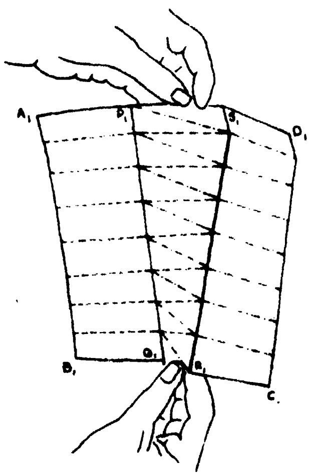
(d) अगर मोड़ सही और स्पष्ट होंगे तो धीरे–धीरे वर्ग अपने आप चित्र 2 में दिखाए आकार का रूप ले लेगा। आगे बढ़ने से पहले सभी मोड़ों की जांच कर लें।

बनाने के चरण

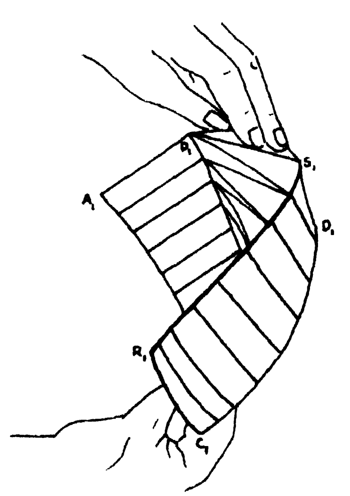
1. चित्र 1 में दिखाए चारों तीरों की दिशा में ही आपको एक साथ, धीरे–धीरे बल लगाना है। कागज को मोड़ने से पहले आप केवल खाली हाथों से इसका अभ्यास करें।
2. मुड़े हुए चौकोर को बिन्दु M_2 और M_4 पर पकड़ें। दोनों हाथों की पकड़ लचीली हो।
3. धीरे–धीरे M_2 और M_4 को विपरीत दिशाओं में घुमाएं। साथ–साथ M_2 को M_4 की ओर धकेलें। घुमाते समय आप पेंदे के मोड़ों को भी सावधानी से बनाते जाएं।



चित्र 1 : एक–साथ लगाने वाले चार बलों की दिशाएं



चित्र 2 : वर्ग को सही प्रकार से पकड़ें



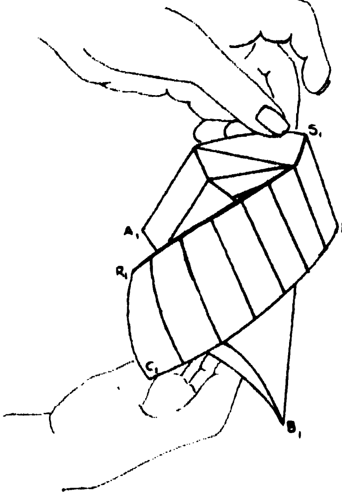
चित्र 3 : धीरे–धीरे करके चारों बलों को लगाएं

4. बल लगाते रहें। क्या बिंदु M_2 और M_4 एक–दूसरे के पास आ रहे हैं?

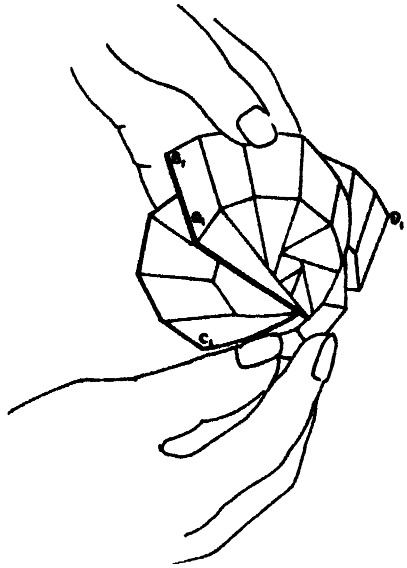
5. जब आयत PQRS बिल्ले का रूप ले चुके तब बल लगाना बंद कर दें। बेलनाकार पेंदे वाला डिब्बा तैयार होगा। वो खुले नहीं इसके लिए उसमें ताला लगाना होगा।

6. सावधानी से बिन्दुओं P और R के स्थानों को आपस में बदल दें। इससे डिब्बे के पेंदे में अधिक दृढ़ता आएगी। गोलाकार दीवार को खुलने से रोकने के लिए पहले पट्टी ABUT और फिर WVCD को एक–दूसरे पर मोड़ें। इससे डिब्बा बेलनाकार बना रहेगा।

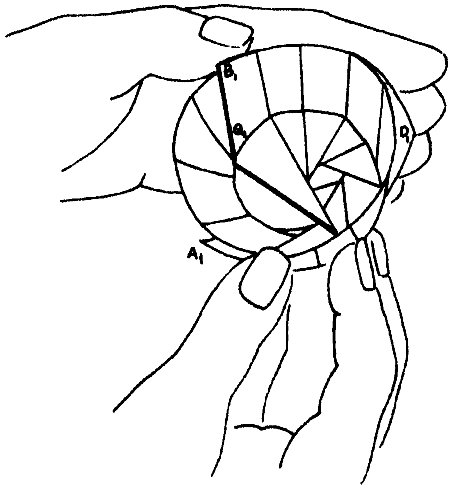
7. इस प्रकार बेलनाकार डिब्बा बन कर तैयार हो जाएगा।



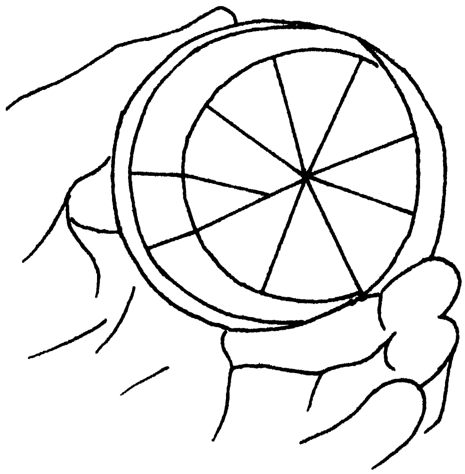
चित्र 4 : घुमावदार बल लगाना जारी रखें



चित्र 5 : पेंदे का बिल्ला बनकर तैयार



चित्र 6 : बिल्ले के किनारों की अदला–बदली



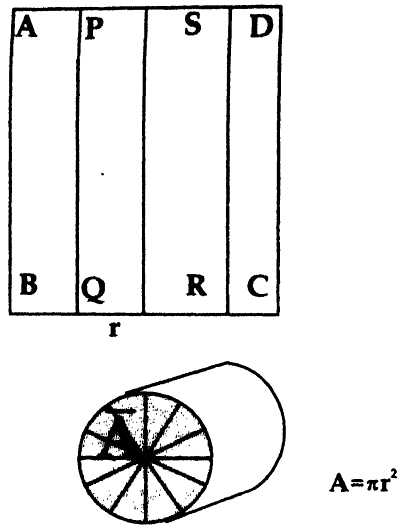
चित्र 7 : डिब्बे के किनारों को मोड़ें। इससे डिब्बा खुलेगा नहीं

दायां बेलनाकार डिब्बा : कुछ गणित के खेल

यहां पर दिए हुए सुझावों का इस्तेमाल कर आप गणित की कई कठिन समस्याओं को बेलनाकार डिब्बों की मदद से प्रत्यक्ष में समझ सकते हैं।

1. गोल पेंदे का क्षेत्रफल (A)

बेलनाकार डिब्बे के गोल पेंदे का क्षेत्रफल, दरअसल आयत PQRS द्वारा बनाए बिल्ले के क्षेत्रफल जितना ही होगा।



चित्र 1 : गोल पेंदे का क्षेत्रफल

2. खड़ी दीवारों का क्षेत्रफल :

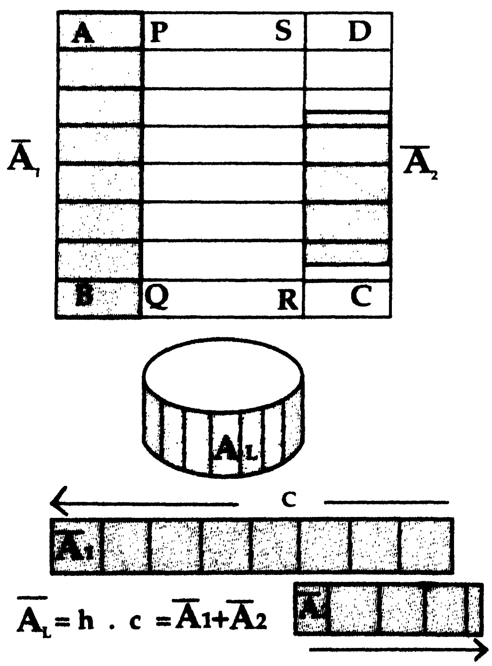
A_L = परिधि × ऊंचाई। आप बेलनाकार डिब्बे की खड़ी दीवार को बाहर से रंग सकते हैं। अब डिब्बे को खोल कर चपटा कर दें। आप नापे हुए क्षेत्रफलों की तुलना हिसाब–किताब से निकाले क्षेत्रफल से करें।

3. tan θ और अधिकतम चौड़ाई की सीमाएं : आपने देखा होगा कि जैसे–जैसे चौड़ाई QR बढ़ती है, वैस–वैसे θ कम होता है। अगर θ, 11.5 अंश से कम होगा तो बेलनाकर डिब्बा कभी बंद ही नहीं होगा। इसीलिए आप कभी भी चौड़ाई QR को AB के 62.5 प्रतिशत से अधिक नहीं बढ़ा सकते। दूसरे शब्दों में PQ अधिकतम = 1.25, अगर AB=2 इकाई।

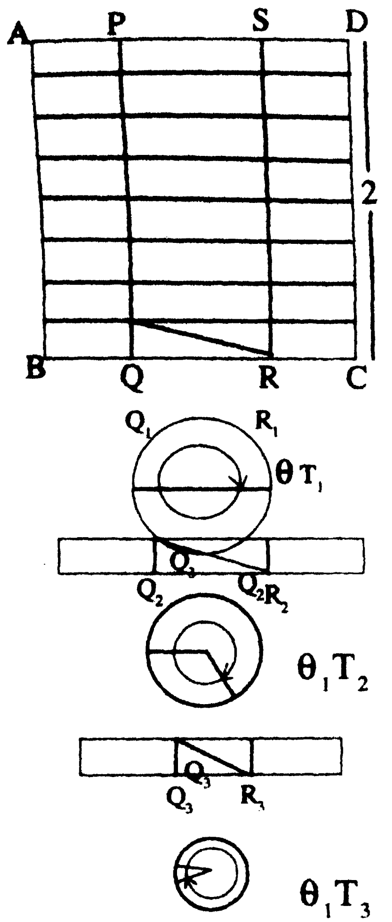
दूसरी ओर जब आप चौड़ाई PQ को कम करते हैं तो q बढ़ता है, और उसके कारण परतें एक–दूसरे पर लिपटती हैं। क्या आपने उथले और गहरे डिब्बे बनाते वक्त इस तथ्य पर गौर किया है?

4. अधिकतम आयतन :

किसी भी आकार के बेलनाकार डिब्बे का आयतन V= पेंदे का क्षेत्रफल × ऊंचाई। सैद्धांतिक रूप में सबसे गहरे डिब्बे (h=1/2AB) से लेकर सबसे उथले डिब्बे (r=1/2 AB) को भी एक ही कागज के चौकोर से बनाया जा सकता है। इन आखिर की सीमाओं पर आयतन शून्य होगा। इन दोनों सीमाओं के बीच में कहीं पर अधिकतम आयतन V_M होगा। इस विशिष्ट ऊंचाई (या त्रिज्या) को आयतन के समीकरण को पृथक (डिफरेंशियेट) करके पाया जा सकता है। (इसमें किनारे की मुड़ी पट्टियों की चौड़ाई को नज़रंदाज करें)।



चित्र 2 : डिब्बे की दीवार का सतही क्षेत्रफल



अधिकतम $Q_1R_1 \max = ?$

$2 . \theta_1 . 8 = 180^0$

$\theta_1 = 11.25^0$

$\tan^{-1}(11.25^0) = 0.2$

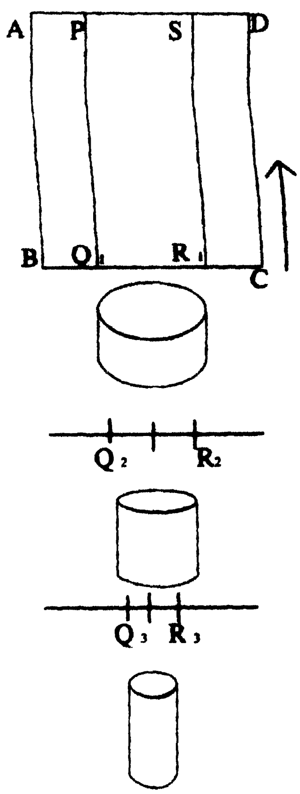
$$\tan \theta_1 = \frac{1/4}{Q_1R_1} = 0.2$$

इकाई $Q_1R_1 = 1.25$ units

चित्र 3 : $\tan \theta$ और अधिकतम चौड़ाई Q_1R_1 की सीमाएं

मज़ेदार काम : (1) किसी भी वर्ग के लिए बेलनाकार डिब्बे की न्यूनतम चौड़ाई की सीमा कितनी हो? उस स्थिति में θ का मान क्या होगा?

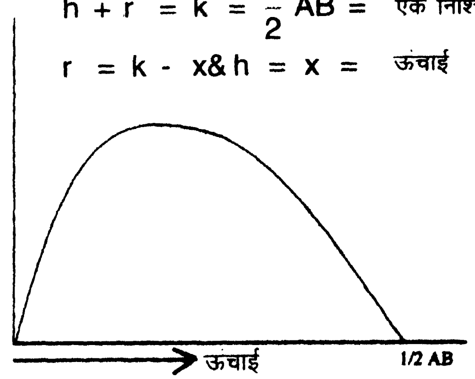
मज़ेदार काम : (2) खंडों की संख्या बढ़ाने का आयतन पर क्या प्रभाव होगा?



चित्र 4 (a) ऊंचाई बढ़ने के साथ आयतन में बदलाव

$h + r = k = \frac{1}{2} AB =$ एक निश्चित संख्या

$r = k - x \& h = x =$ ऊंचाई



आयतन $= V - A.H = (\pi r^2).\ h$

$= \pi(k - x)^2.\ x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\pi k^2 x - 2\pi k x^2 + \pi x^3)$$

$= \pi k^2 - 4\pi k x + 3\pi x^2$

$= 3\pi x^2 - 4\pi k x + \pi k^2$

$ax^2 + bx + c$ . . पुनर्गठन के बाद एक द्विघाती समीकरण है

आयतन $V = A.h$

जब V अधिकतम होगा तो π का मान क्या होगा?

इसका उत्तर द्विघाती समीकरण ax^2+bx+c को हल करके मिलेगा।

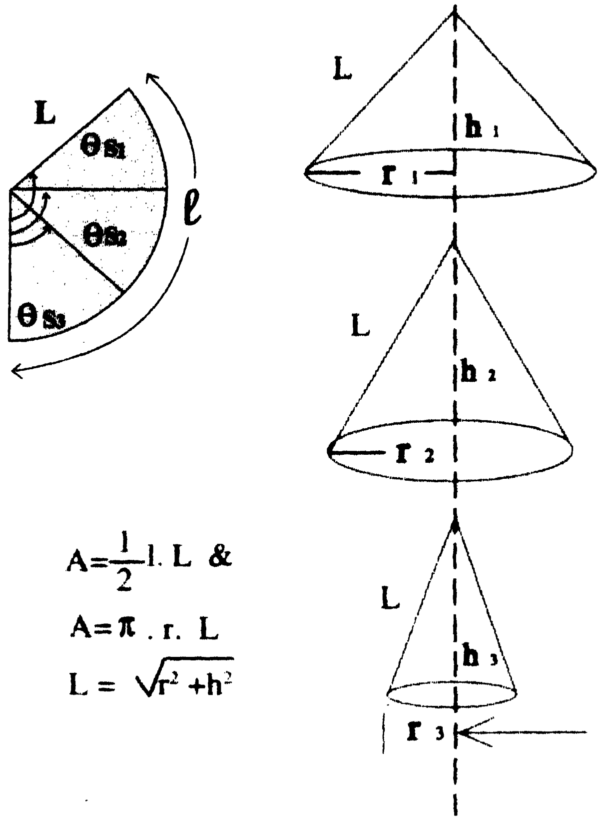
चित्र 4 (b) अधिकतम आयतन के लिए ऊंचाई

दायां गोल शंकु

1. अगर हम किसी गोले का एक खंड लें और उसके दोनों सीधे सिरों को आपस में जोड़ दें तो एक दायां गोल शंकु बन जाएगा। अगर खंड का कोण θ घटा दिया जाए तो शंकु की ऊंचाई (h) बढ़ जाएगी और उसके गोल पेंदे की त्रिज्या (r) घट जाएगी। परंतु शंकु की तिरछी ऊंचाई (L) समान रहेगी। अगर आप एक सुन्दर शंकु चाहते हैं तो उसके लिए आप अधिक खंडों से बना बिल्ला इस्तेमाल करें। (चित्र 7)

2. एक परत वाला बिल्ला लें और उसे खड़ी स्थिति में आधे में काटें, जिससे दो बराबर पट्टी बन जाएं।

3(a) और (b) : अब दाएं हाथ वाली पट्टी पर बिल्ला मोड़ें जिससे खंड $C_1O_1D_1$ बन जाए। खंड $C_1O_1D_1$ को पलटें। चाप की यह सतह शंकु की अंदर वाली सतह होगी। (चित्र 3–b)

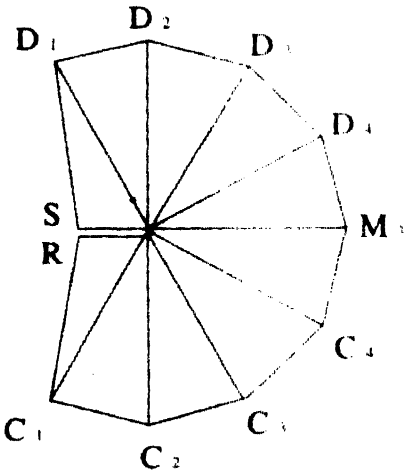


$$A=\frac{1}{2}l.L\ \&$$

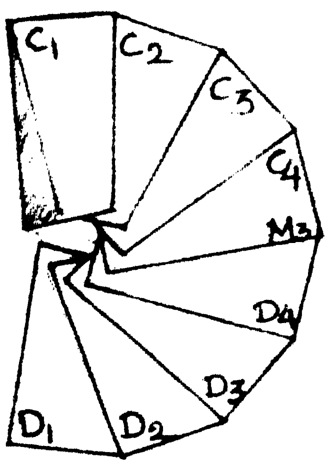
$$A=\pi.r.L$$

$$L=\sqrt{r^2+h^2}$$

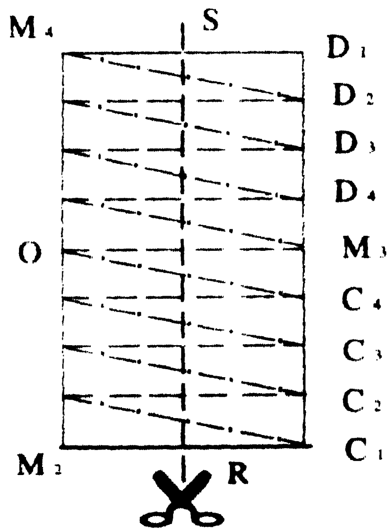
चित्र 1 : गोले के अलग–अलग खंडों से बने शंकु



चित्र 3 (*a*) : खंड $C_1O_1D_1$ को पलटें अब इससे शंकु की बाहर वाली सतह बनेगी



चित्र 3 (*b*) : खंड $C_1O_1D_1$ को पलटने पर इससे शंकु की अंदर वाली सतह बनेगी



चित्र 2 : बिल्ले का कागज खड़ी स्थिति में बीच से काटें

4. अब फ्लैप RO_1C_1 को खोलें और सिरे C_1O_1 को घुमाकर सिरे D_1O_1 की सीध में ले आएं। अब फ्लैप RO_1C_1 को P_1D_1 के नीचे जेब में फंसा दें। इस तरह शंकु बन जाएगा।

5. शंकु का बाहरी हिस्सा रंग कर उसे खोल कर चपटा कर दें।

6. ओरिगैमी पद्धति द्वारा शंकु का सतही क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। पाठ्य पुस्तक में शंकु के क्षेत्रफल (A) का जो सूत्र दिया होता है, वह चित्र (1) में दिया है। पर आप चाहें तो सीधे उसे अपने द्वारा मोड़े शंकु से निकाल सकते हैं। इसमें

A= द्विबाहु त्रिकोण $C_1O_1C_2$ का क्षेत्रफल

= 1/2 b.h............................जहां

b= त्रिकोण $C_1O_1C_2$ का आधार = 1/2 इकाई

h= त्रिकोण $C_1O_1C_2$ की ऊंचाई = 1/2 इकाई

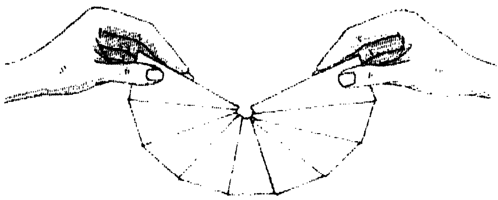
A= 1/2×1/2×1 = 1/4 वर्ग इकाई।

A= A×6............(छह रंगीन त्रिकोण)

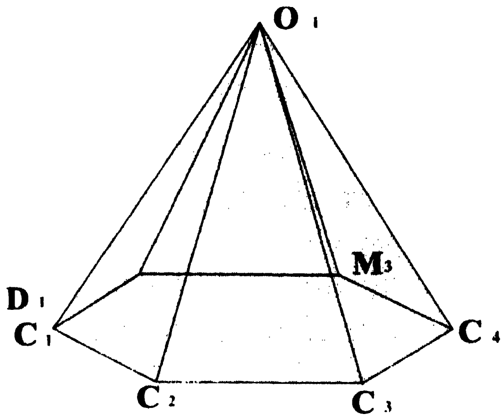
= 1/4 ×6=1.5 वर्ग इकाई।

7. यहां पर 16 खंडों वाले आधे–बिल्ले से बने शंकु का चित्र दिया है।

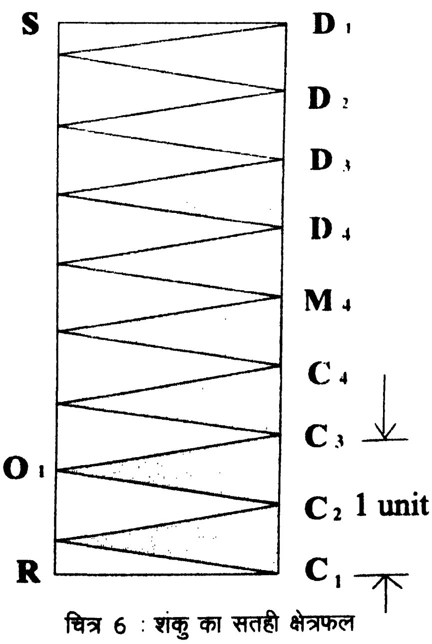
मज़ेदार काम : (1) एक बेलनाकार डिब्बा और उसमें एकदम फिट होने वाला शंकु बनाएं। फिर उनके आयतनों के बीच का रिश्ता खोजें।



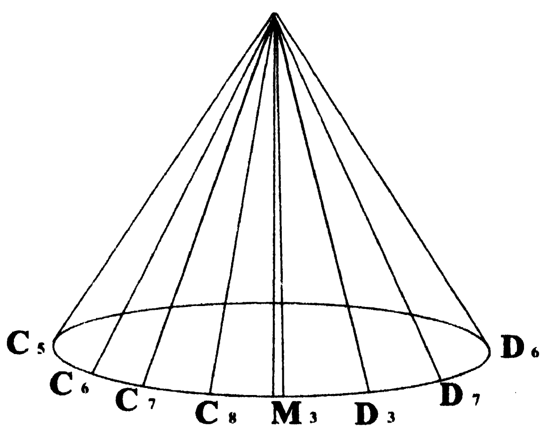
चित्र 4 . शंकु बनाने के लिए खंड के दोनों सिरों को मिलाएं



चित्र 5 छह हिस्सों से बना शंकु



चित्र 6 : शंकु का सतही क्षेत्रफल



चित्र 7 : 16 खंडों वाले बिल्ले से बना शंकु

शंकु के कटान

एक परत वाले बिल्ले के दरअसल दो एक – जैसे खंड होते हैं, जो कि कुछ–कुछ एक–दूसरे पर लिपटे होते हैं। इनसे दो शंकुओं का मॉडल बन सकता है। इन शंकुओं की चोटियां आपस में मिली होंगी। वैसे तो यह एक अच्छा गणित का मॉडल हैं, परन्तु आप इसका उपयोग अन्य जगहों पर भी कर सकते हैं।

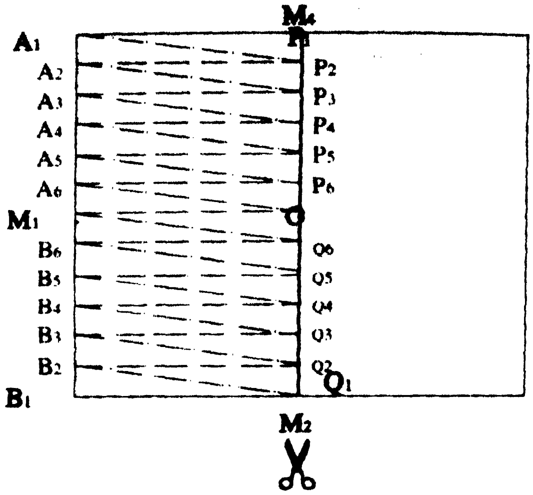
1 . एक पतले और मजबूत चौकोर कागज पर 12 खंडों वाला बिल्ला मोड़ें। कागज का नाप लगभग 20×20 सेंटीमीटर का हो। आप केवल दाएं हाथ वाले हिस्से का ही इस्तेमाल करें।

2 (a) इस मुड़े कागज को घुमाकर एक सादा बिल्ला बनाएं। बिल्ले के B_1Q_1 और P_1A_1 सिरों का स्थान आपस में बदल दें।

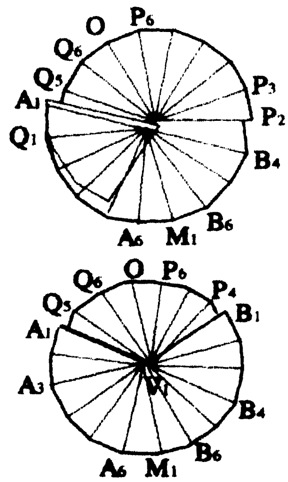
2 (b) अब आपको स्पष्ट रूप से चाक A_1B_1 दिख रहा होगा। चाक P_1Q_1 साफ–साफ निचली सतह पर है।

3 . अब चित्र में दिखाए अनुसार ऊपरी तह के सिरों को पकड़ें और भुजाओं A_1V_1 और B_1V_1 को एक–दूसरे की तरफ तब तक घुमाएं जब तक भुजा A_1V_1 भुजा B_3V_1 से एक तिकोनी जेब में मिल नहीं जाती। यह स्थान A_3V_1 के पीछे होगा। इस मॉडल की प्रवृत्ति बार–बार खुलने की होगी। इसको अधिक सुदृढ़ बनाने के लिए A_1A_2 के छोटे कोनों को B_2B_3 पर मोड़ें। ऐसे ही मोड़ निचली सतह पर दोहराएं।

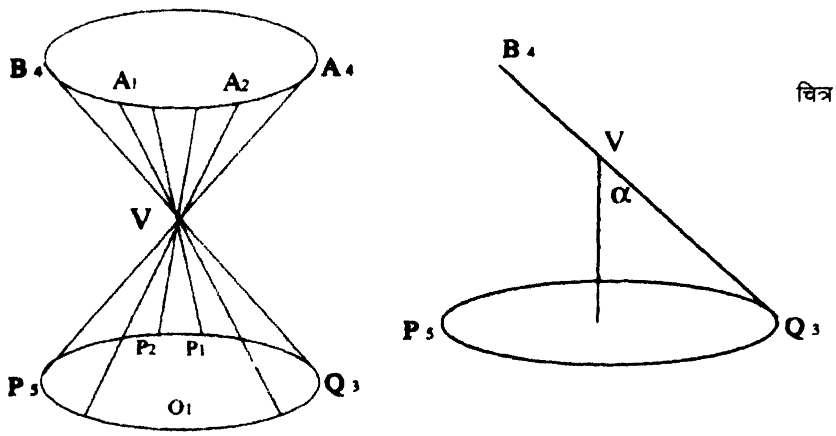
4 . इस मॉडल से आपको शंकु के कटे हुए भागों जैसे – अंडाकर आकृति (इलिप्स) परवलय और अतिपरवलय को समझने में मदद मिलेगी।



चित्र 1 : बारह खंडों वाले बिल्ले का कागज

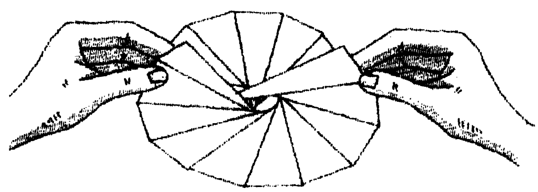


चित्र 2 : दो सेक्टर वाले बिल्ले की ऊपरी और निचली सतहें



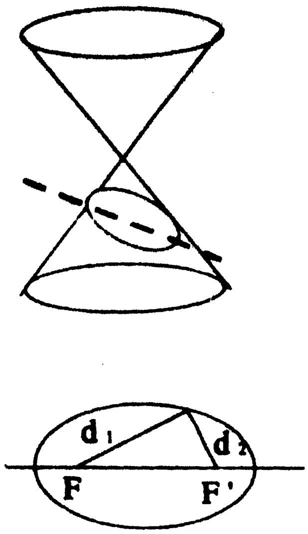
V= चोटी Q_3V, शंकु के जनक α चोटीकोण

चित्र 4 : डबल–शंकु का ढांचा

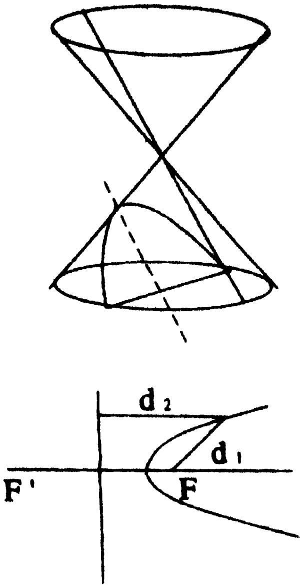


चित्र 3 : दोनों सेक्टरों को घुमाकर डबल–शंकु बनाएं

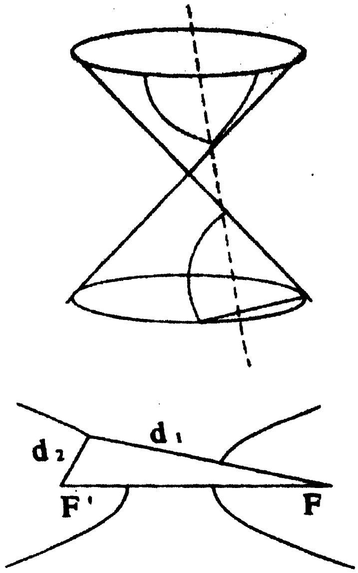
5,6 और 7 शंकु के कटान जैसे इलिप्स, पैराबोला और हाईपरबोला बनाने के तरीके



चित्र 5 : इलिप्स

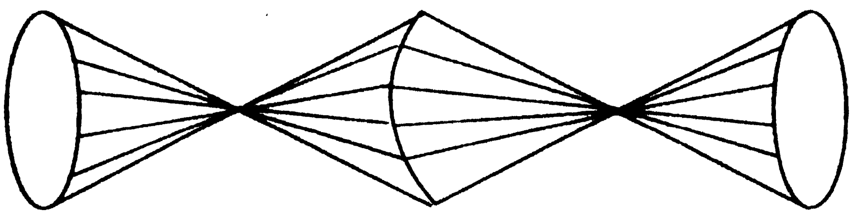


चित्र 6 : परवलय (पैराबोला)



चित्र 7 : अति परवलय (हाईपरबोला)

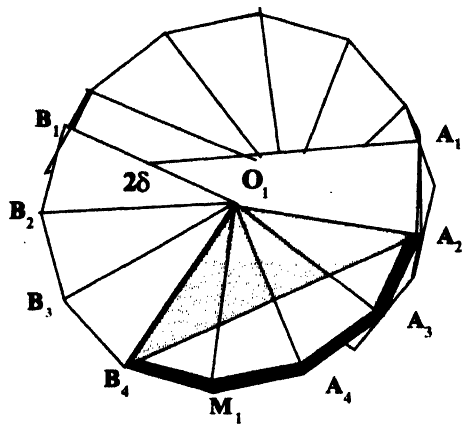
मजेदार काम : (1) क्या आप चित्र में दिखाए गए मॉडल को एक कागज से बना सकते हैं?



वृत्तों पर प्रमेय : एक जैसे चाप और कर्णचाप

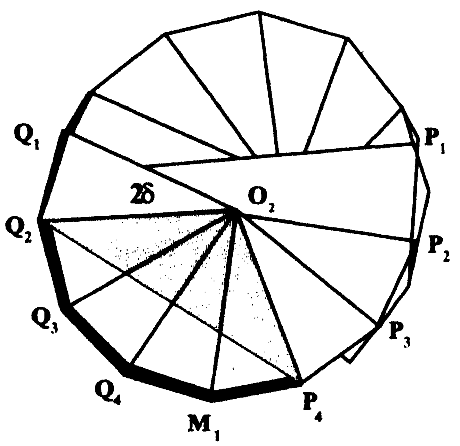
प्रमेय : अगर किसी वृत्त के दो चाप अनुरूप (कानग्रुएंट) है तो उनके समतुल्य कर्णचाप (चाप को जोड़ने वाली सीधी रेखा) भी एक बराबर होंगे।

1 (a) (b) : दो सादे बिल्ले R_1 और R_2, एक नाप के कागजों से मोड़ें। दोनों बिल्ले एक–दूसरे के अनुरूप होंगे। चित्र में दिखाए तरीके से उनके कोनों पर पहचान चिन्ह डालें।



(a) बिल्ला R_1

अब बिल्ला R_1 लें और पेंसिल से उसके कोनों से गुजरते किसी भी चाप पर निशान लगाएं। मान लें यह चाप B_4A_2 है। इस चाप में कितने खंड हैं? 4 खंड होंगे। अब बिल्ले R_2 के भी किसी चाप पर निशान लगाएं, परन्तु उसमें भी 4 खंड ही होने चाहिए। मान लें यह चाप Q_2P_4 है। अब रेखाएं B_4A_2 और Q_2P_4 मोड़ें, या उन पर पेंसिल से निशान बना दें।



(b) बिल्ला R_2

चित्र 1 : दो समतुल्य बिल्ले

सिद्ध करें कि : $B_4A_2 = Q_2P_4$

प्रमाण : दोनों त्रिकोणों $B_4O_1A_2$ और $Q_2O_2P_4$ में

$B_4O_1A_2 = Q_2O_2P_4 = 2\delta \times 4$

$O_1B_4 = O_1A_2 = O_2Q_2 = Q_2\ P_4$

$= 1/2$ कर्ण

$B_4O_1A_2 = Q_2O_2P_4$

$B_4A_2 = Q_2\ P_4$

आप चाहें तो प्रत्यक्ष में रेखा B_4A_2 को रेखा Q_2P_4 पर रख कर तुलना कर सकते हैं।

मजेदार काम : इसी तरह से इस प्रमेय की उल्टा प्रमेय सिद्ध करें। प्रमेय : अगर एक वृत्त के दो कौर्ड एक–दूसरे के अनुरूप हैं, तो उनके वृत्तखंड (चाप) भी समतुल्य होंगे।

कर्णचाप को जोड़ने वाली रेखा पर लंब

1. प्रमेय : वृत्त के केन्द्र से किसी चाप को जोड़ने वाली रेखा (कौर्ड) पर पड़ी लम्ब, कौर्ड को दो बराबर हिस्सों में बांटती है।

(2) एक बिल्ले के किसी वृत्तखंड A_1B_1 को मोड़कर एक कौर्ड बनाएं। मान लें कि यह कौर्ड A_2B_3 है। (चाप A_1B_1 केन्द्र पर $2\delta\times8 = 28\times8 = 224^0$, यानि 180^0 से अधिक का कोण बनाता है)।

अब A_2B_3 को खुद अपने ऊपर इस तरह से मोड़ें जिससे कि उसकी लम्ब बिन्दु O_1 से होकर गुजरे। मान लें यह लम्ब O_1L है।

(3) सिद्ध करें $B_3L = A_2L$

प्रमाण : कोण O_1LB_3 = कोण $O_1LA_2 = 90^0$ (स्पष्ट दिया है)

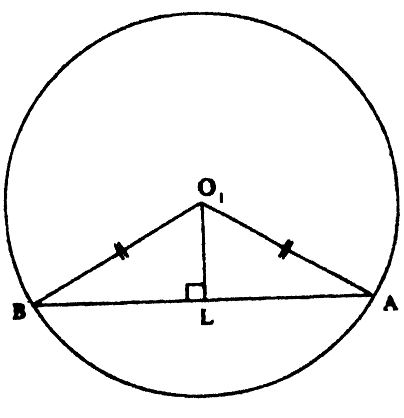
$O_1B_3 = O_1A_2 = 1/2$ कर्ण

O_1L = दोनों त्रिकोणों में समान हैं।

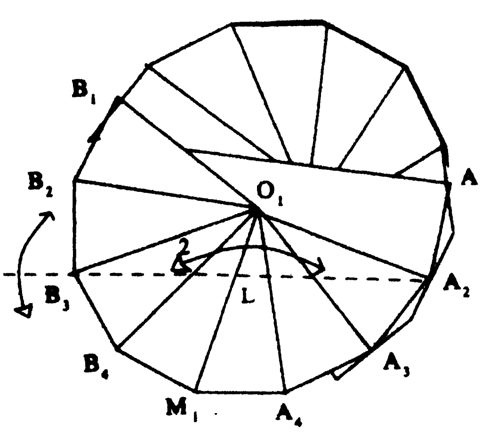
त्रिकोण $O_1L\ B_3$ = त्रिकोण O_1LA_2

इसलिए $B_3L = A_2L$

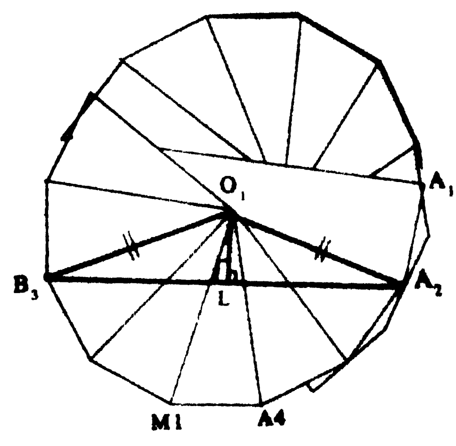
मज़ेदार काम : इसी तरह इस प्रमेय की उल्टी प्रमेय सिद्ध करें। प्रमेय : वह रेखा जो किसी वृत्त के केंद्र से होकर किसी कौर्ड को दो बराबर भागों में बांटती है, तो वह रेखा कौर्ड के लम्बवत होगी।



चित्र 1 : वृत्त के चाप को जोड़ने वाली रेखा (कौर्ड के लंबवत)



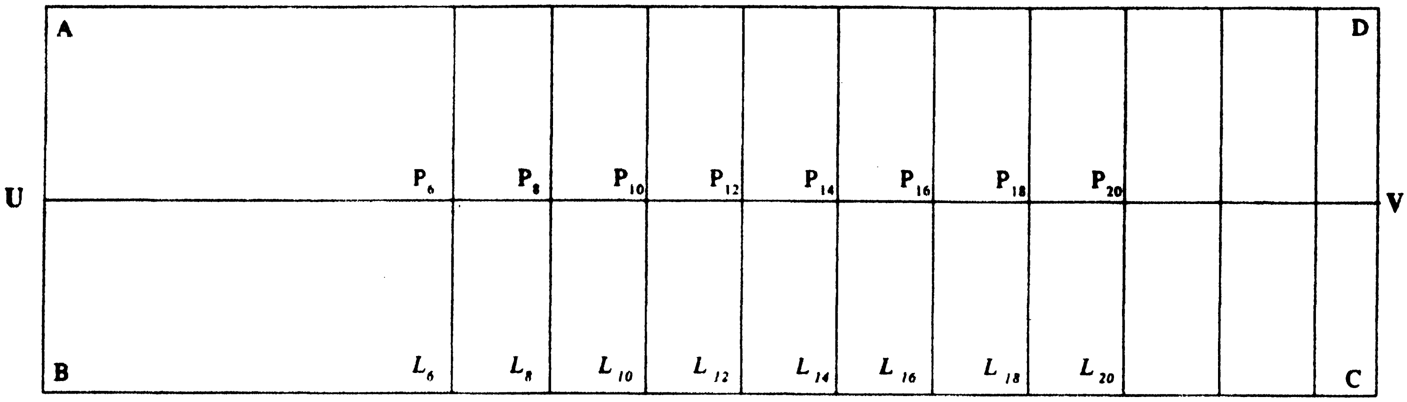
चित्र 2 : बिल्ले में बना कौर्ड



चित्र 3 : बिल्ले के चाप को जोड़ने वाली रेखा (कौर्ड) के लंबवत

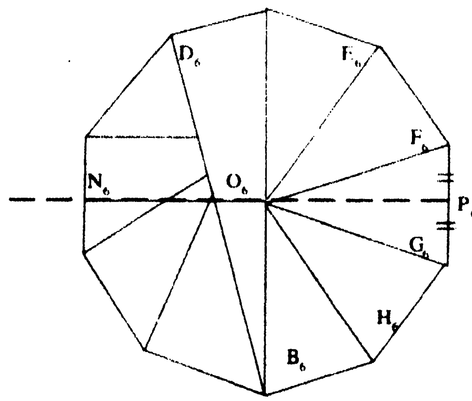
वृत्त की स्पर्श रेखा

प्रमेय : एक रेखा जो किसी वृत्त की त्रिज्या के लंबवत हो और त्रिज्या के छोर से होकर गुजरती हो, ऐसी रेखा वृत्त को केवल एक बिन्दु पर ही छूती है।



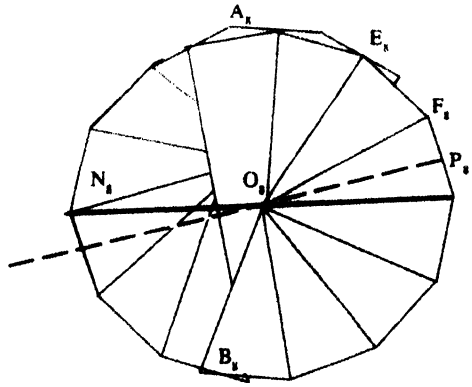
चित्र 1 : आयताकार पट्टी को एक–समान दूरी के खंडो मे बाटना

(1) एक कागज की लम्बी, आयताकार पट्टी लें और उसकी मध्य–रेखा UV मोड़ें। रेखा UV पर समान दूरियों पर स्थित करीब दस बिंदुओं पर निशान लगाएं, जैसे P_6, P_8.... Pn इन बिंदुओं से गुजरती खड़ी रेखाएं 16, 18....Ln मोड़ें। (यहां पर n का मान बिल्लों में खंडों की संख्या जितना होगा)।

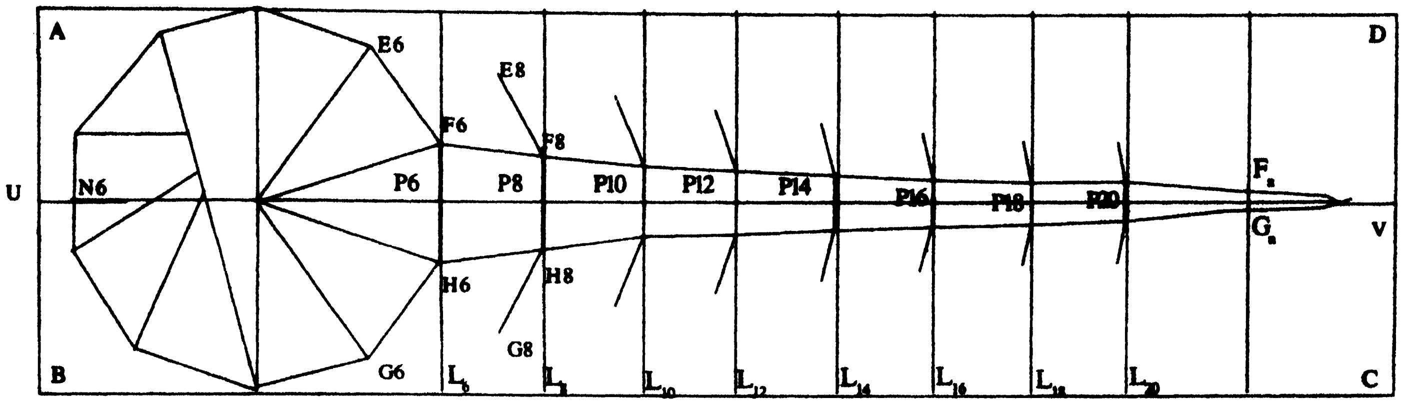


चित्र 2 (*a*) छह खंडों वाला बिल्ला

(2a) और (b) कुछ अलग–अलग बिल्ले लें जिनमें खंडों की संख्या n = 6,8,10,12,14,16,18,20 आदि हो। अब एक 6 खंडों वाला बिल्ला लें और उसके किसी खंड की किनार के मध्य–बिन्दु को P_6 से दर्शाएं। रेखा $P_6 N_6$ बनाएं जो कि बिल्ले के केन्द्र O_6 से होकर गुजरेगी। इसी क्रिया को बाकी बचे हुए बिल्लों के साथ भी दोहराएं।



चित्र 2 (*b*) आठ खंडों वाला बिल्ला



चित्र 3 : खंडों की संख्या बढ़ने के साथ संपर्क दूरी में कमी

(3) अब 6 खंडों वाले बिल्ले को कागज की पट्टी पर इस तरह रखें कि दोनों P_6 बिन्दु एक–दूसरे पर जमकर बैठ जाएं। अब रेखा N_6P_6 को थोडा ठीक करें जिससे वह मध्य–रेखा UV की एकदम सीध में आ जाए। इस स्थिति में रेखा L_6 रेखा N_6P_6 के लंबवत होगी। अब अपनी पेंसिल लेकर उससे पट्टी पर E_6,F_6, G_6 और H_6 कोनों पर निशान लगाएं। इन बिंदुओं को रेखाओं से जोड़ दें। इस क्रिया को दूसरे बिल्लों के साथ भी दोहराएं।

अब सभी F बिंदुओं को और सभी G बिंदुओं को वक्रों से जोड़ दें। आप पाएंगे कि जैसे–जैसे n का मान बढ़ता है वैसे–वैसे खंडित चाप F_nG_n की लंबाई कम होती जाती है। अंत में चाप एक बिंदु में विलीन हो जाता है। इसीलिए रेखा Ln जो कि रेखा O_nP_n के लंबवत है, वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर काटती है। यही इसका प्रमाण है।

मज़ेदार काम : (1) जब आपकी साइकिल के टायर–ट्यूब में कम या ज्यादा हवा भरी होती है, तब आप सवारी के समय क्या अंतर महसूस करते हैं?

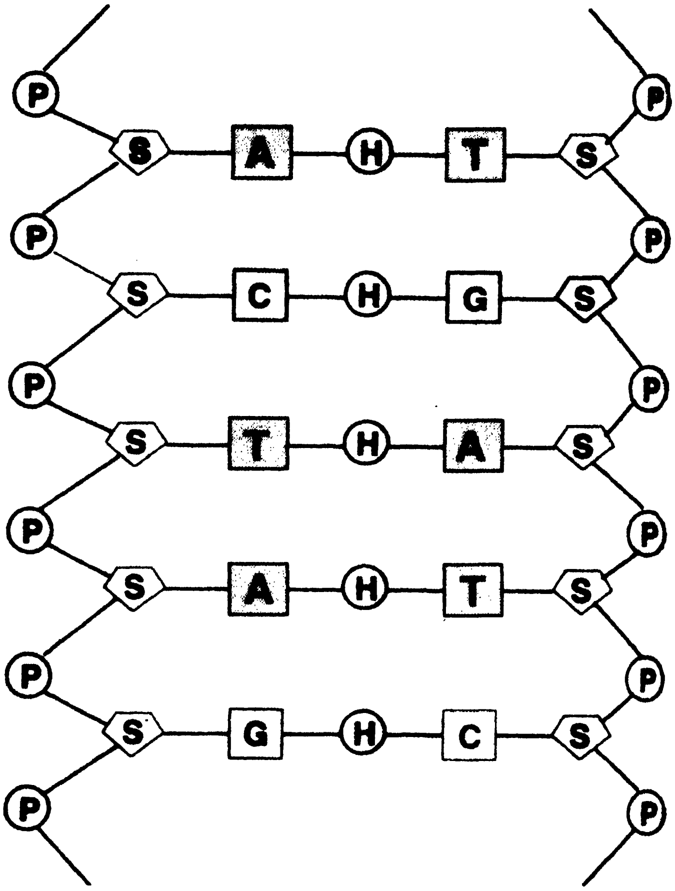
(2) आम जिंदगी के उन अनुभवों की एक सूची बनाएं जो 'वृत्त की स्पर्श रेखा' वाली प्रमेय पर आधारित हों। क्या कभी कागज मोड़ते वक्त आपका इससे पाला पड़ा है?

डी.एन.ए. की हेलिक्स (कर्णपरिधि)

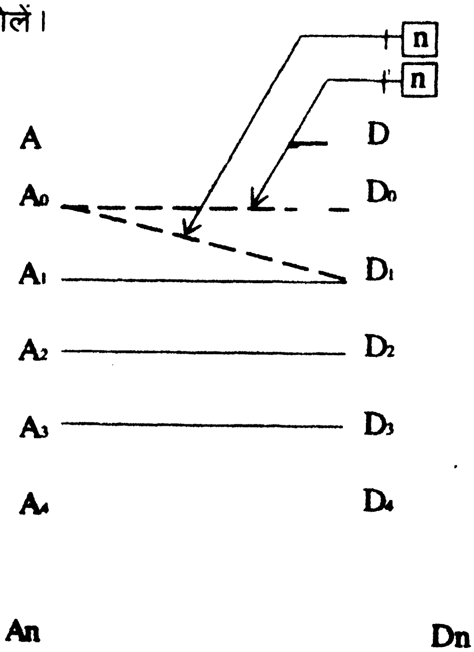
जिंदगी की पैदाइश में डी.एन.ए. के परमाणु का एक अहम रोल है। यह वह गूढ़ संकेत है, वह याददाश्त है, जिस की वजह से ही कोई भी प्रजाति अपना कामकाज एक नियमित रूप से कर पाती है।

1. रासायनिक ढांचा : डी.एन.ए. परमाणु के ढांचे में दो घुमावदार, आपस में लिपटी सीढ़ियां होती है। इसीलिए इसे डी.एन.ए. हेलिक्स के नाम से जाना जाता है। हेलिक्स की बाहरी किनारों पर बारी–बारी से शक्कर ओर फासफेट के परमाणु होते हैं। दायीं और बायीं ओर की आधार–जोड़ियों को हाईड्रोजन के अपनी बंध जगहों पर रखते हैं। आधार जोड़े हमेशा एक निश्चित तरीके से जुड़े होते हैं। अगर एडनीन हमेशा थाईमीन से हाथ मिलाती है, तो गुआनीन हमेशा साइटोसीन का ही दामन थामती है। इस तरह केवल चार जोड़ें ही बन सकते हैं A-T, T-A, G-C और C-G.

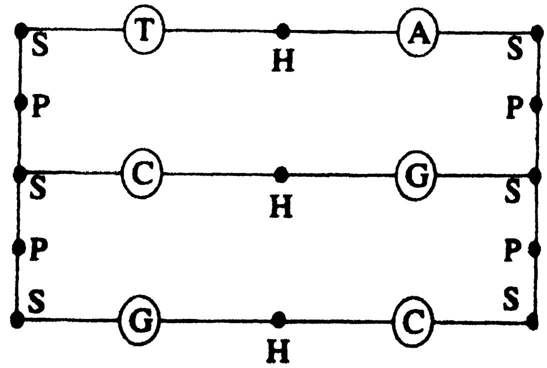
2(a) और (b) तरीका : एक पतले और मजबूत कागज की पट्टी लें (चौड़ाई लगभग 120 सें.मी. ओर लंबाई कम–से कम 30 सें.मी. की हो)। पट्टी को लंबाई में मोड़–मोड़ कर 2 सें.मी. ऊंचाई के आयत बना लें। आयतों के कोनों पर शक्कर का परमाणु दर्शाने के लिए उन पर S लिख दें। दो S परमाणुओं के मध्य में फासफेट (P) लिखें। लेटी रेखाओं के मध्य पर H (हाइड्रोजन) का निशान लगाए। अब S और H परमाणुओं के बीच T-A और H-C की जोड़ियां बनाएं। सारे निशान लगाने के बाद पहाड़ी जैसे मोड़ें और खोलें।



चित्र 1 : डी.एन.ए. की हेलिक्स का चपटा रासायनिक ढांचा

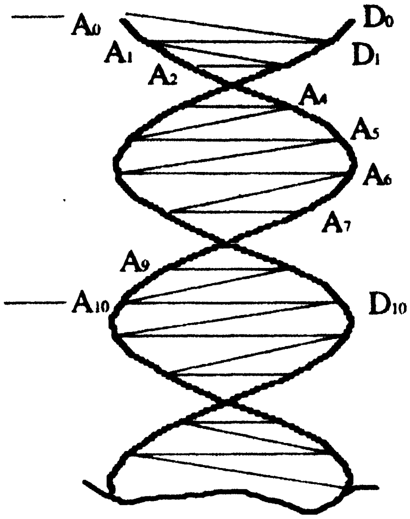


चित्र 2(a) : लंबी आयताकार पट्टी में डी.एन.ए. के मॉडल के लिए बनी चुन्नटें



चित्र 2(b) : कागज की पट्टी पर परमाणुओं को दर्शाना

3. डी.एन.ए. की हेलिक्स : अब प्रदर्शन के लिए तैयार है। अगर आप इंजिनियरिंग ड्राइंग वाला ट्रेसिंग कागज इस्तेमाल करेंगे और सभी परमाणुओं को अलग-अलग रंगों से दर्शाएंगे तो आपका मॉड्ल और भी सुन्दर लगेगा।



चित्र 3 : डी.एन.ए. की हेलिक्स

कागज के बिल्ले और स्कूली गणित

यह पुस्तक अन्य ओरिगैमी की पुस्तकों से भिन्न है। यह केवल कागज के बिल्लों के बारे में है। इन गोल बिल्लों को चौकोर कागज से मोड़ा जाता है। पुस्तक के खंड II में फोल्डर को बिल्लों के अनेकों डिजाइनों और उनमें छिपे नमूनों से अवगत कराया गया है।

खंड III में बिल्लों की तहों में छिपे गणित के संबंधों को उजागर किया गया। एनसीईआरटी के पाठ्यक्रम और बिल्लों की गणित में करीबी का रिश्ता पाया गया। जबकि जांच का यह उद्देश्य नहीं था। अन्य ओरिगैमी के मॉडलों को शामिल करके इस उद्देश्य को पूरा किया जा सकता है। इस बीच, गणित कि शिक्षक बिल्ले में अपनी ओर से कुछ जोड़कर गतिविधियों को रोचक और मज़ेदार बना सकते हैं। नीचे एनसीईआरटी के हाई स्कूल पाठ्यक्रम के कुछ विषयों का उल्लेख है जो बिल्लों से किसी रूप में जुड़े हैं।

बिल्ले और स्कूली गणित

(एनसीईआरटी के हाईस्कूल पाठ्यक्रम से संबंधित विषय)।

1. **रेखाएं** : समानांतर और लंबवत रेखाएं, इंटरसेप्ट, अनुपातिक इंटरसेप्ट, रेखा को बराबर खंड में बांटना।

2. **त्रिकोण** : समकोण त्रिकोण, समतुल्य त्रिकोण।

3. **चतुर्भुज** : वर्ग, आयत, समानांतर चतुर्भुज, समलंब और इनसे संबंधित प्रमेय।

4. **वृत्त** : त्रिज्या, व्यास, वृत्त की परिधि, वृत्त के चापकर्ण (कौर्ड), केन्द्रीय कोण, वृत्त के कोणीय गुणधर्म, चाप, वृत्त के चाप का माप, वृत्त के अंदर के कोण। वृत्तखंड और उसके कोण, वृत्तखंड का क्षेत्रफल। वृत्त की स्पर्श रेखा, वृत्त के बाहर बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा। इन विषयों से संबंधित कुछ प्रमेय।

5. **बेलन और शंकु** : दाएं गोल बेलन, बेलन और दाएं गोल शंकु। दाएं गोल बेलन और शंकु का आयतन और सतही क्षेत्रफल।

6. **त्रिकोणमिति** : sine और tan। sine (ज्या) की तरंग बनाना।

7. **अन्य** : पाई चार्ट, बिंदुओं, रेखाओं और त्रिकोणों की सममति। कुछ तीन आयामी मॉडलों का निर्माण।

अध्याय 36

ओरिगैमी द्वारा गणित की परीक्षाएं

अगर स्कूली गणित को ओरिगैमी के जरिए सरल और रोचक बनाया जाता है तो निश्चित ही एक दिन ओरिगैमी द्वारा गणित की परीक्षाएं भी ली जाएंगी। छात्र प्रश्नों पर आधारित ओरिगैमी के मॉडल बनाएंगे और फिर उन्हें खोल कर चपटा करेंगे जिससे उनके मोड़ सुरक्षित बने रहें। परंपरागत परीक्षा की कापियों को हिसाब–किताब, तालिकाओं आदि के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।

आवश्यक सामान

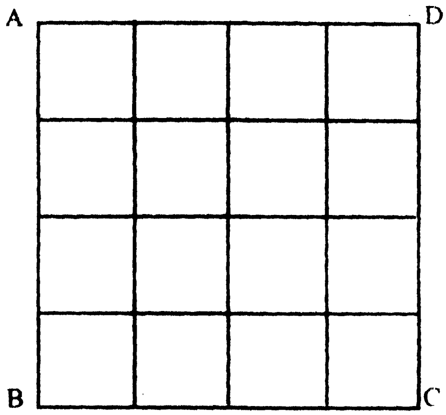
(a) कागज के वर्ग जिनका नाप 16×16 सेमी या 20×20 सेमी का हो।

(b) सही नाप की आयताकार पट्टियां जिनकी चौड़ाई लगभग 6 सेमी हो।

जिस पाठ्यक्रम का अध्याय 35 में उल्लेख किया गया है उस पर आधारित कुछ प्रश्नों के उदाहरण यहां पेश हैं। आवश्यकता पड़ने पर गणित के शिक्षकों और विशेषज्ञों की सहायता से एक विस्तृत प्रश्न–बैंक बनाया जा सकता है।

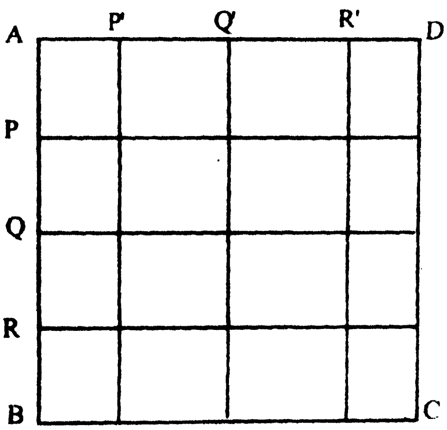
समानांतर, लंबवत, तिरछी रेखाएं और कोण

प्रश्न 1 : चित्र में दिखाए 16 वर्गों का जाल बनाएं। इस जाल में कुल वर्गों की संख्या गिनें। (उत्तर 30 वर्ग)



चित्र प्रश्न 1 : रेखा *AB* से बराबर दूरी पर तीन समानांतर और लंबवत रेखाएं।

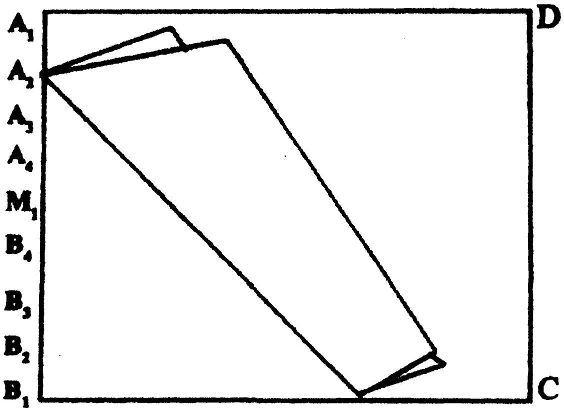
प्रश्न 2 : वर्ग ABCD की भुजा AB पर अपनी इच्छानुसार कहीं पर भी तीन बिंदु P,Q,R चुनें। इन तीनों बिंदुओं से गुजरती और AB के लंबवत तीन रेखाएं बनाएं। AB के समानांतर तीन अन्य रेखाएं बनाएं जिनकी दूरी AP,AQ और AR के बराबर हो। कुल कितने वर्ग बने उनकी संख्या ज्ञात करें?



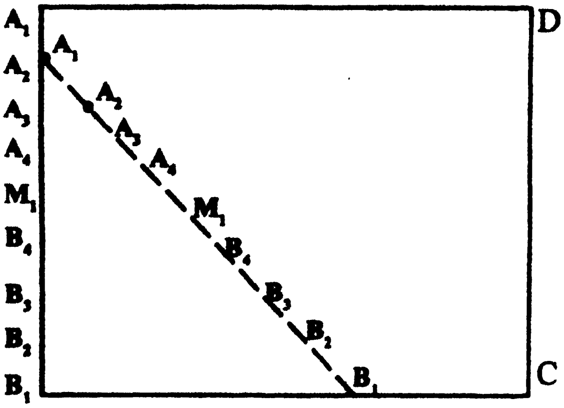
चित्र प्रश्न 2 और 3 : रेखा *AB* के समानान्तर और लंबवत अनिश्चित दूरियों पर बनी तीन रेखाएं।

प्रश्न 3 : दिए हुए वर्गों को इस प्रकार मोड़ें जिससे उनमें 100 और 121 छोटे वर्ग बन जाएं। इन जालों का कहां उपयोग होगा?

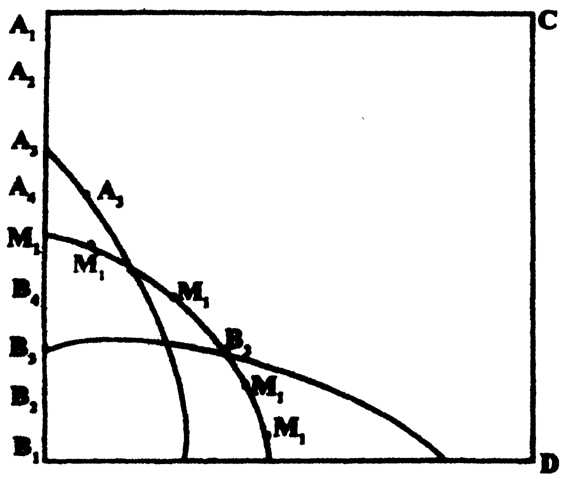
प्रश्न 4 : दो बड़े, एक–जैसे समतुल्य वर्ग लें। चित्र Q_4A में दिखाए अनुसार भुजा AB पर बराबर दूरियों पर सात निशान लगाएं। उन्हीं निशानों के साथ एक दूसरे वर्ग को चार तहों वाली आयताकार पट्टी में मोड़ें। अब पट्टी को रेखा AB के साथ मिलाएं जिससे सभी बिंदु एक–दूसरे से मेल खाएं। अब पट्टी को एक–एक खंड करके नीचे सरकाएं। आप पाएंगे कि पट्टी के कोने A_1 और B_1 हमेशा वर्ग की भुजाएं AB और BC पर जमें रहेंगे। चित्र Q_4B में दिखाए अनुसार हर चरण पर बिंदु $A_2, A_3, ..., B_2$ की स्थितियां नोट करें। अंतिम चरण में पट्टी के बिंदु A_1 और B_1 वर्ग के बिंदु B_1 और C से मिल जाएंगे। बिंदु M_1 और B_3 की सभी स्थितियों को चित्र 3 में दिखाए तरीके से एक वक्र रेखा से जोड़ें। अन्य बिन्दुओं के लिए भी इसी प्रकार की वक्र रेखाएं बनाएं। यह वक्र किस प्रकार के हैं? क्या आप इनके समीकरण लिख सकते हैं?



चित्र : प्रश्न 4A बिंदु A_2 पर पट्टी को मिलाएं



चित्र : प्रश्न 4B वर्ग के ऊपर मेल खाते बिंदुओं पर निशान लगाएं

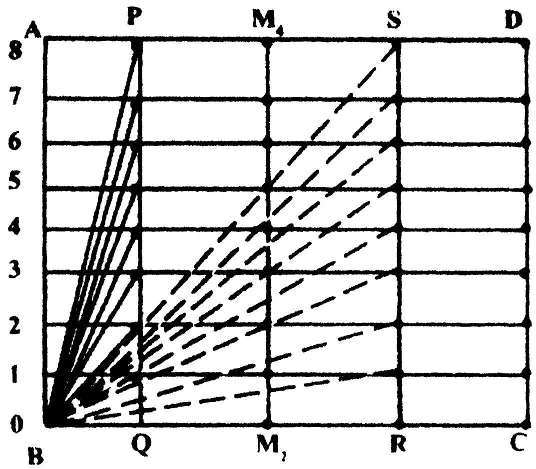


चित्र : प्रश्न 4C A_3, A_4 और M_1 और अन्य बिंदुओं को जोड़ने वाले वक्र

प्रश्न 5 : एक वर्ग की भुजा BC पर निम्न कोण बनाएं। कोण बनाने के लिए चांदे या अन्य किसी उपकरण का उपयोग नहीं करें। (i) 14 अंश (ii) 30 अंश (iii) 31 अंश (iv) 36 अंश (v) 45 अंश (vi) 76 अंश।

(संकेत $\tan 14^0 = 0.25$, $\sin 30^0 = 1/2$)

प्रश्न 6 : एक बड़ा वर्ग लें और उसे लेटी स्थिति में 8 और खड़ी स्थिति में 4 बराबर भागों में बाटें। चित्र 6A के अनुसार सभी कटान बिंदुओं को बिंदु B से रेखाओं द्वारा जोड़ें। सभी कोणों को चांदे से नापें और अपने नतीजों को नीचे की तालिका में लिखें। इस तालिका से आप क्या परिणाम निकाल सकते हैं? कौन से कोण सभी में एक समान हैं? क्या इस अभ्यास से त्रिकोणमिति के संबंधों का परिचय कराया जा सकता है? सबसे अधिक और न्यून कोण क्या है?



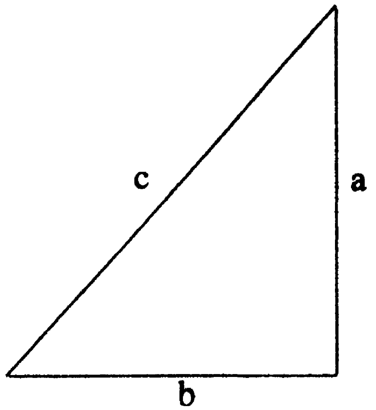
चित्र प्रश्न: 6A 32 कटान बिंदुओं द्वारा बनाए कोण

	भुजा PQ		भुजा M_4M_2		भुजा SR		भुजा DC	
खंडों की संख्या	अंशों में कोण		अंशों में कोण		अंशों में कोण		अंशों में कोण	
8	76							
7	74							
6	72							
5	68							
4	63							
3	56							
2	45				34			
1	27				9.5			

चित्र प्रश्न 6B प्रत्येक खड़ी भुजा द्वारा बनाए गए कोणों की तालिका

त्रिकोण, चतुर्भुज और सममिति (सिमेट्री)

प्रश्न 7 : एक वर्ग में 8×8 का जाल है। तालिका में दी भुजा पर इस वर्ग में समकोण त्रिकोण बनाएं। एक कागज की पट्टी से भुजा C की लंबाई नापें। इसकी तुलना पाइथागोरस सूत्र $a^2+b^2 = C^2$ से मिली लंबाई से करें।



चित्र प्रश्न 7A

इकाईयां	इकाईयां	इकाईयां
2	8	
4	8	
6	8	
8	8	

चित्र प्रश्न 7B

प्रश्न 8 : एक वर्ग में 8×8 का जाल है। इसमें ऐसे समद्विबाहु, समकोण त्रिकोण बनाएं जिनका आधार 2,4,6 और 8 इकाई हो। समद्विबाहु, समकोण त्रिकोण के आधार और ऊंचाई के बीच में क्या संबंध है?

प्रश्न 9 (i) वर्ग ABCD के अंदर एक समबाहु त्रिकोण PBC बनाएं।

(ii) आप किसी भी वर्ग के अंदर अधिकतम क्षेत्रफल वाला समबाहु त्रिकोण कैसे बनाएंगे?

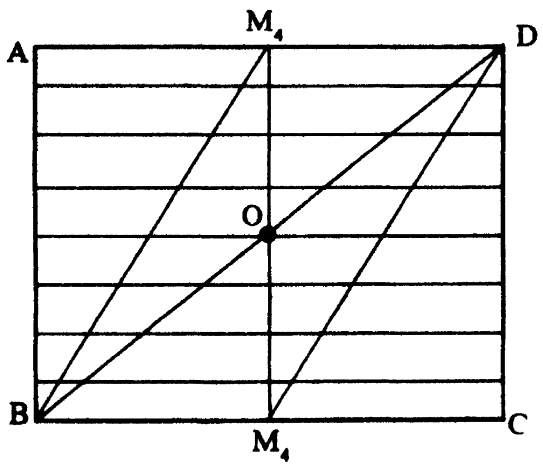
(iii) आप किसी समबाहु त्रिकोण को चार एक जैसे समबाहु त्रिकोणों में कैसे बाटेंगे?

(संकेत **(ii)** के लिए : त्रिकोण कर्ण AC के चारों ओर सिमेट्रिक यानि एक–समान हो। ($\sin 30^0 = 1/2$)

प्रश्न 10 : निम्न प्रमेयों की ओरिगैमी पद्धति द्वारा पुष्टि करें :

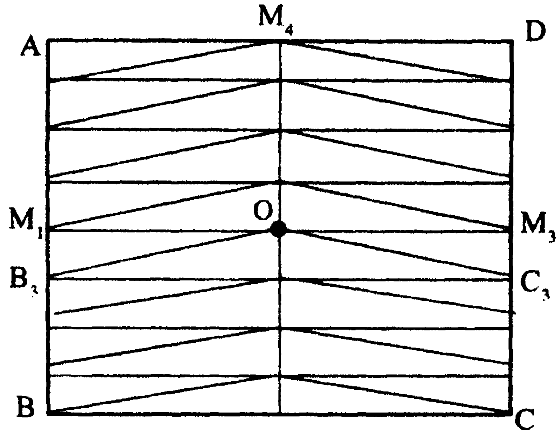
(a) किसी भी समानांतर चतुर्भुज की कर्ण एक–दूसरे को आधे में काटती हैं।

(b) कोई भी चतुर्भुज, समानांतर चतुर्भुज तभी होगा जब उसकी विपरीत भुजाएं एक–बराबर और समानांतर होंगी।



चित्र प्रश्न 10

प्रश्न 11 : रेखा की सममित पर प्रमेय : दो त्रिकोण जो एक रेखा के सममित हैं आपस में समतुल्य होंगे। इस प्रमेय की ओरिगैमी पद्धति से पुष्टि करें।



चित्र प्रश्न Q11

प्रश्न चित्र 12 : निम्न आकृतियों में सममिति की अक्षों की संख्या बताएं।

त्रिकोण

1. $\Delta M_4 BC$
2. $\Delta M_1 BC_2$
3. ΔPBC
4. ΔABC

चतुर्भुज

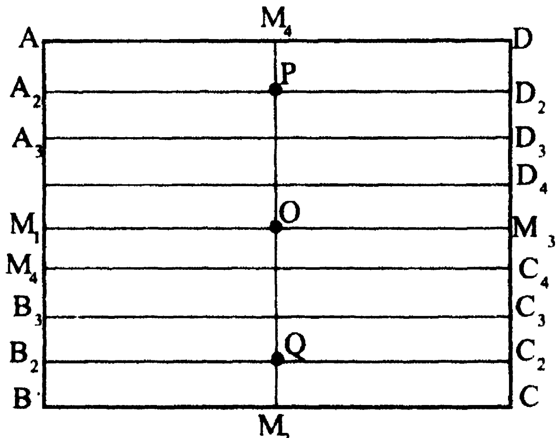
5. चतुर्भज ABCD
6. चतुर्भज ABM_2M_4
7. चतुर्भज $ABCM_4$
8. चतुर्भज ABC_3D_3
9. चतुर्भज PABQ

पंचभुज

10. $M_2 M_1 BC M_3$

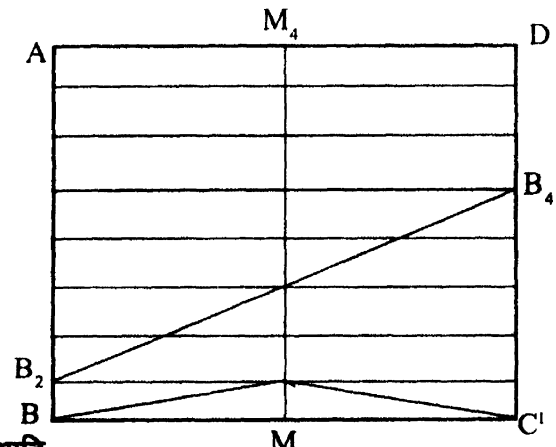
षट्भुज

11. $M_4A_3B_3M_2C_3D_3$



चित्र प्रश्न Q12

प्रश्न 13 : ओरिगैमी की पद्धति द्वारा बुनियादी अनुपात की प्रमेय (थेल्स प्रमेय) को सिद्ध करें। (प्रमेय : किसी भी त्रिकोण में एक भुजा के समानांतर बनी रेखा दूसरी दोनों रेखाओं को समान अनुपात में काटेगी)।

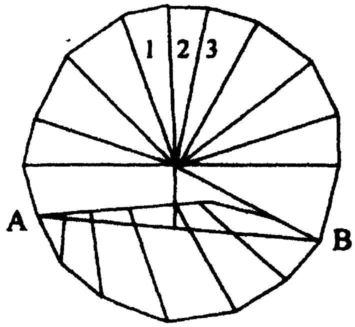


चित्र प्रश्न Q13

वृत्त, स्पर्शरेखा, कर्णचाप, खण्ड आदि

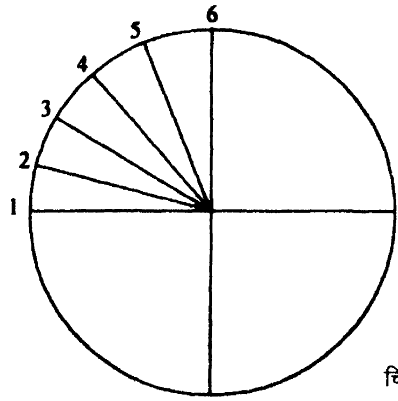
प्रश्न 14 : एक 20×20 सेमी. वर्ग से, दस खंडों वाला बिल्ला बनाएं और उसमें निम्न चीजें नापें :

(i) कर्णचाप AB की लम्बाई।
(ii) कर्णचाप AB की कर्ण से दूरी।
(iii) बड़े और छोटे चाप AB की लंबाई।
(iv) बड़े और छोटे चाप AB के कोणीय माप।
(v) तीन खंडों द्वारा बनाए टुकड़े का क्षेत्रफल और उनका कोण।
(vi) AB के बड़े और छोटे खंडों का क्षेत्रफल।



चित्र प्रश्न 14

प्रश्न 15 : एक ऐसा बिल्ला बनाएं जिसमें एक खंड का कोण 15^0 $2\delta=15^0$) हो।

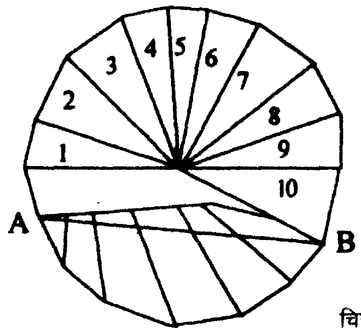


($2\delta= 15^0$)

चित्र प्रश्न 15

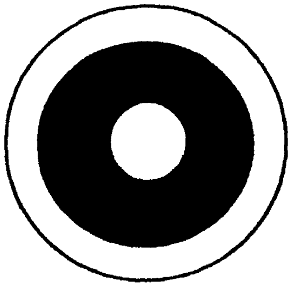
प्रश्न 16 : प्रश्न 15 के बिल्ले की मदद से 360^0 तक sine तरंग बनाएं।

प्रश्न 17 : बिल्ले की किनार (चाप AB) द्वारा बनाया कुल कोण ज्ञात करें जब n=6,8,10 और 12 हो। क्या कोण का मान खंडों की संख्या के साथ बढ़ता है? क्यों?



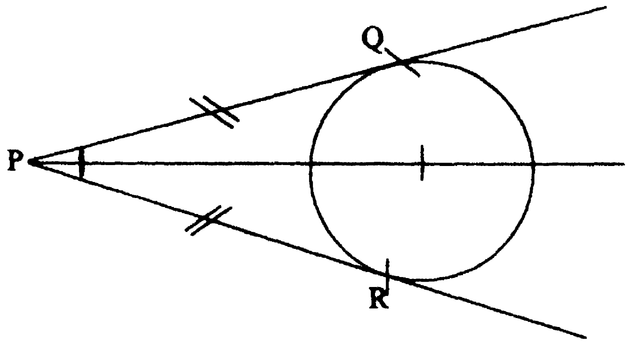
चित्र प्रश्न 17 : चाप AB द्वारा बनाया कोण जब n=10

प्रश्न 18 : एक रंगीन आयताकार पट्टी से तीन, बराबर दूरियों पर स्थित एक–के–अंदर एक गोले बनाएं।



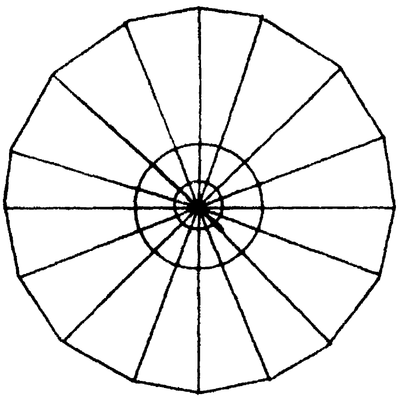
चित्र प्रश्न 18 : एक पट्टी द्वारा बने एक–के–अंदर–एक तीन गोले

प्रश्न 19 : ओरिगैमी पद्धति द्वारा सिद्ध करें कि बाहर स्थित बिंदु से वृत्त तक आई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाई एक समान होगी और वो बिंदु और केन्द्र से जुड़ने वाली रेखा से समान झुकाव पर होंगी।

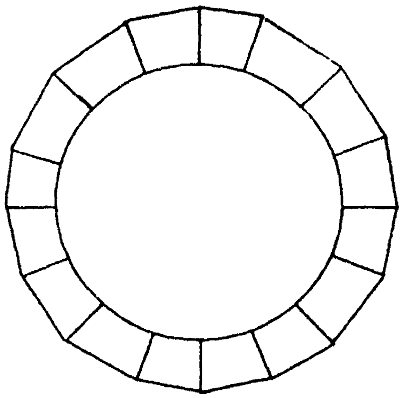


चित्र प्रश्न 19

प्रश्न 20 : एक आयताकार पट्टी से 360^0 माप वाले पूरे चाप का एक बिल्ला बनाएं। आप चित्र 20B में दिखाए गोलाकार छल्ले को एक सकरी पट्टी से कैसे बनाएंगे।



चित्र प्रश्न 20A 360^0 चाप वाला पूरा बिल्ला



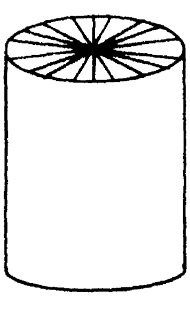
चित्र प्रश्न 20B सकरी पट्टी से बना गोल छल्ला

बेलन और शंकु

प्रश्न 21 : किसी भी वर्ग से अधिकतम आयतन वाला बेलनाकार डिब्बा बनाएं। किसी भी तरह से यह सिद्ध करें कि डिब्बे का आयतन अधिकतम है।

प्रश्न 22 : A_4 नाप के आयताकार फुलस्केप कागज का उपयोग कर एक उथला बेलनाकार बर्तन बनाएं। मिलिलीटर में उसका आयतन ज्ञात करें।

प्रश्न 23 : फुलस्केप कागज से एक बंद बेलनाकार डिब्बा बनाएं।



चित्र प्रश्न 23

प्रश्न : 24 : दो एक जैसे वर्गाकार कागजों को इस्तेमाल कर एक दायां गोल बेलनाकार बर्तन और उसके मुंह पर फिट होने वाला ढक्कन बनाएं। निर्माण के तरीके को संक्षिप्त में लिखें।

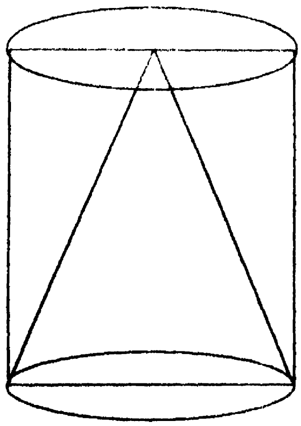
प्रश्न : 25 : 20×20 सेमी. नाप के वर्गाकार कागजों से अलग–अलग व्यास के बेलनाकार डिब्बे बनाएं। अपने परिणामों को नीचे की तालिका में भरें। अधिकतम आयतन के लिए डिब्बे की ऊंचाई और चौड़ाई का अनुपात क्या है?

(इस प्रश्न को हल करके देखने से आपको प्रश्न 21 हल करने में आसानी होगी)।

चौड़ाई सेमी. में	ऊंचाई सेमी. में	आधार का क्षेत्रफल वर्ग सेमी. में	आयतन घन सेमी में	दीवार का क्षेत्रफल वर्ग सेमी. में	कुल सतही क्षेत्रफल वर्ग सेमी. में
न्यूनतम					
अधिकतम					

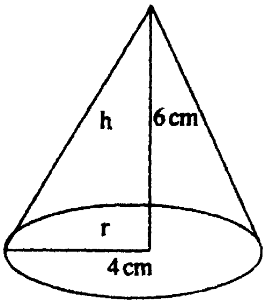
चित्र प्रश्न 26

प्रश्न : 26 : एक बेलनाकार डिब्बा और उसमें एकदम फिट होने वाला शंकु बनाएं। इस जोड़ी से आप यह कैसे सिद्ध करेंगे कि शंकु का आयतन बेलनाकार डिब्बे का एक–तिहाई है?



चित्र प्रश्न 26

प्रश्न : 27 : एक शंकु बनाएं जिसकी ऊंचाई h=6 सेमी. और त्रिज्या r=4 सेमी हो। इस शंकु का आयतन और सतही क्षेत्रफल मालूम करें।

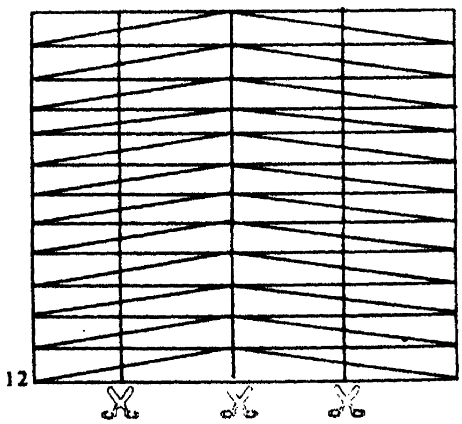


चित्र प्रश्न 27

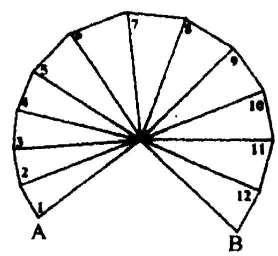
प्रश्न : 28 : तालिका में दिखाए अनुसार अलग–अलग खंडों का उपयोग कर चार शंकु बनाएं। इसके लिए 20×20 सेमी वर्गागार कागज को 12 खंड वाले बिल्ले के लिए मोड़ें और उसकी चार पट्टियां लें। अपने अवलोकनों की तालिका बनाएं। अगर आवश्यकता पड़े तो खंडों की संख्या बढ़ाएं।

शंकुओं का आयतन अधिकतम कब होगा?

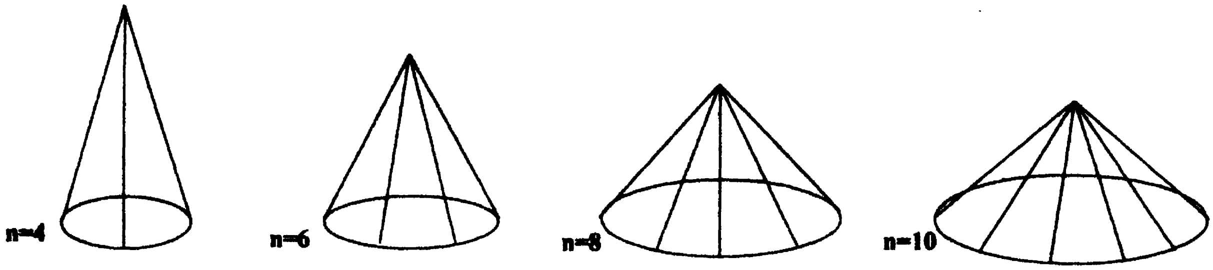
खंडों की संख्या	C परिधि सेमी. में	r त्रिज्या सेमी. में	hऊंचाई सेमी में	Vआयतन घन सेमी. में	Aमुड़े भाग का सतही क्षेत्रफल वर्ग सेमी. में
4					
6					
8					
10					



चित्र 28 (प्रश्न A) बारह खंडों वाले बिल्ले के कागज की चार पट्टी काटें

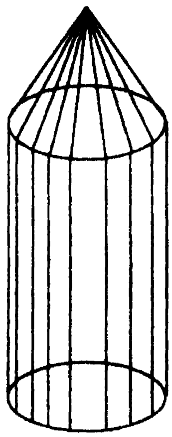


चित्र 28 (प्रश्न B) भिन्न संख्या के खंडों का उपयोग कर अलग–अलग शंकु बनाएं



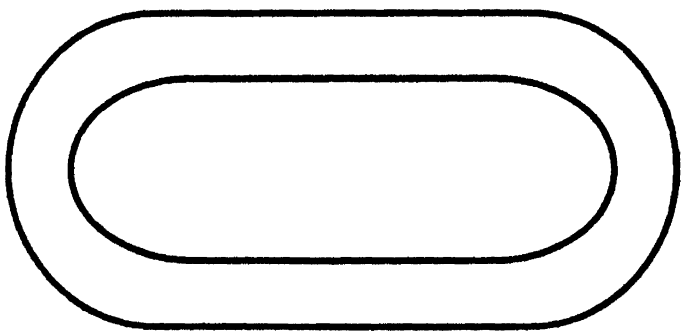
चित्र 28 (प्रश्न C) अलग–अलग संख्या में खंडों का उपयोग करके बने भिन्न शंकु

प्रश्न : 29 : एक वर्गाकार कागज का उपयोग कर एक बेलनाकार डिब्बे के ऊपर एक शंकु बनाएं।



चित्र प्रश्न 29

प्रश्न : 30 : केवल एक कागज की पट्टी उपयोग कर एक अंडाकार रेस–ट्रैक बनाएं। इस बात का ध्यान रखें कि आपका मॉडल सभी रूप में एक–समान हो। इस काम में आपको समीकरणों और मापने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।



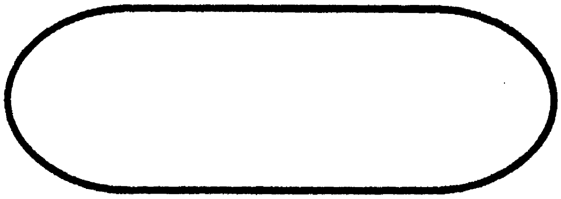
चित्र प्रश्न 30

प्रश्न : 31 : एक अंडाकार मॉडल बनाएं जिसके निम्न अनुपात हों :

(a) सीधा पथ =100×2 मीटर

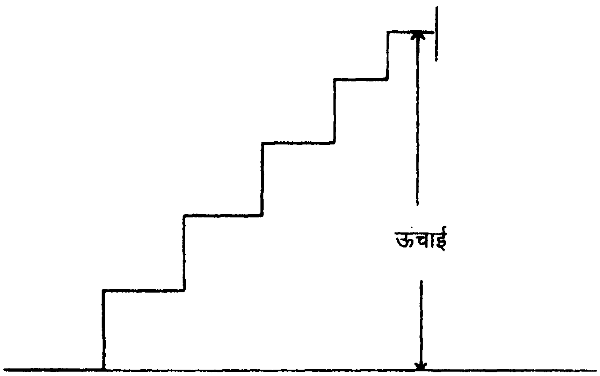
(b) गोल पथ =75×2 मीटर

(c) पथ की चौड़ाई=5 मीटर



चित्र प्रश्न 31

प्रश्न : 32 : एक आयताकार कागज की पट्टी से सीढ़ियों का एक मॉडल बनाएं। अगर उसी कागज से आपको ज्यादा ऊंची सीढ़ियां बनानी हों तो आप डिजाइन में क्या बदल करेंगे।



चित्र प्रश्न 32

प्रश्न : 33 : एक आयताकार पट्टी से एक गोल, घुमावदार सीढ़ी का मॉडल बनाएं।

प्रश्न : 34 : कागज की एक लंबी, आयताकार पट्टी से सही अनुपात में मनुष्य के डी.एन.ए. का मॉडल बनाएं। मनुष्य के डी.एन. ए. के माप इस प्रकार है :

(i) न्यूकलोटाइड जोड़ी की चौड़ाई $=20A^0$

(ii) दो न्यूकलोटाइड जोड़ियों के बीच की दूरी $= 3.4A^0$

(iii) हेलिक्स के प्रत्येक चक्कर में न्यूकलोटाइड जोड़ियों की संख्या =10

(iv) दो न्यूक्लोटाइड जोड़ियों के बीच का कोण $= 36^0$

($A^0=10^{-8}$ सेमी.